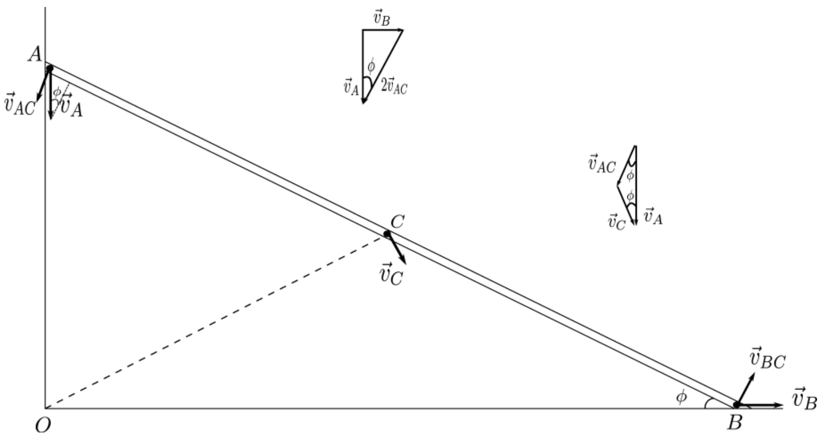
Ράβδος ΑΒ μήκους L αφήνεται να ολισθήσει με τα άκρα της Α και Β σε επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο και το οριζόντιο δάπεδο αντίστοιχα. Κάποια στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με το δάπεδο , το Α έχει κατακόρυφη ταχύτητα $υ_A$ και είναι ακόμα σε επαφή με τον τοίχο. Την στιγμή αυτή να υπολογιστούν με γνωστά τα L , φ , $υ_A$
α) Η ταχύτητα του Β β) η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου γ) η ταχύτητα του μέσου της C.
(Η ράβδος κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο)



Λύση

α) Επειδή τα Α και Β έχουν σταθερή απόσταση θα πρέπει οι προβολές των ταχυτήτων τους στην διεύθυνση της ράβδου να είναι ίσες

$$υ_A\, ημφ = υ_B συνφ \Rightarrow υ_B = υ_A εφφ$$

β) Θεωρούμε την κίνηση της ράβδου ως συνισταμένη μιας μεταφορικής με ταχύτητα $\vec{υ}_C$ και μιας περιστροφικής κίνησης γύρω από το C. Οπότε

$$\vec{υ}_A = \vec{υ}_C + \vec{υ}_{AC} \;(1) \qquad \vec{υ}_B = \vec{υ}_C + \vec{υ}_{BC} \;(2) \quad \text{με } υ_{AC} = υ_{BC} = ω\frac{L}{2} \;(3)$$

Οι $\vec{υ}_{AC}$ και $\vec{υ}_{BC}$ είναι οι ταχύτητες των Α και Β στην κυκλική τους κίνηση γύρω από το C και είναι κάθετες στο ΑΒ. Προφανώς $\vec{υ}_{AC} = -\vec{υ}_{BC}$ (4)

Από (1) – (2) => $\vec{υ}_A - \vec{υ}_B = \vec{υ}_{AC} - \vec{υ}_{BC}$ και λόγω της (4) $\vec{υ}_A - \vec{υ}_B = 2\,\vec{υ}_{AC}$ =>
$\vec{υ}_A = \vec{υ}_B + 2\,\vec{υ}_{AC}$ (5) Λόγω της (5) τα $\vec{υ}_A$, $\vec{υ}_B$, $2\,\vec{υ}_{AC}$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο (οι $\vec{υ}_A$, $\vec{υ}_B$ είναι κάθετες) από το οποίο προκύπτει $υ_A = 2υ_{AC}\, συνφ$ και λόγω της (3)

$$υ_A = 2\,ω\frac{L}{2}\,συνφ \Rightarrow ω = \frac{υ_A}{Lσυνφ}$$

γ) Από (1) +(2) και λόγω της (4) => $2\vec{υ}_C = \vec{υ}_A + \vec{υ}_B \Rightarrow \vec{υ}_C = \dfrac{\vec{υ}A + \vec{υ}B}{2}$ και επειδή οι $\vec{υ}_A$, $\vec{υ}_B$ είναι κάθετες $υ_C = \frac{1}{2}\sqrt{(υ_A)^2 + (υ_B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(υ_A)^2 + (υ_A εφφ)^2} = \frac{1}{2}υ_A\sqrt{1+εφ^2φ} = \frac{υ_A}{2συνφ} = \frac{1}{2}ωL = υ_{AC}$

Το C κάνει προφανώς κυκλική κίνηση με κέντρο το O και ακτίνα L/2. Συνεπώς η $\vec{\upsilon}_C$ είναι κάθετη στο OC.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1)Με την προσθήκη ως 1ου ερωτήματος , του υπολογισμού της οριζόντιας δύναμης F (με γνωστά βάρος ράβδου , L , φ) που πρέπει να δρα στο B ώστε η ράβδος με απουσία τριβών να ισορροπεί , θα μπορούσε η άσκηση αυτή να είναι ένα πλήρες Δ θέμα.

2) Η λύση θα μπορούσε να είναι ακόμα συντομότερη αν η σχέση (5) εθεωρείτο ως άμεσο αποτέλεσμα της ανάλυσης της κίνησης της ράβδου σε μεταφορική με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$ και περιστροφική γύρω από το B. Αυτό όμως θα ήταν έξω από την θεωρία του σχολικού βιβλίου.

3) Το ότι οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_C$ και $\vec{\upsilon}_{AC}$ προκύπτει να έχουν ίσα μέτρα οδηγεί στην σκέψη ότι πρέπει να υπάρχει και καθαρά γεωμετρικός δρόμος προς το αποτέλεσμα αυτό. Πράγματι στο τρίγωνο (λόγω της (1)) των $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{\upsilon}_C$, $\vec{\upsilon}_{AC}$, η γωνία των $\vec{\upsilon}_{AC}$ και $\vec{\upsilon}_A$ είναι ίση με την ABO (καθετότητα πλευρών). Για τον ίδιο λόγο η γωνία των $\vec{\upsilon}_C$ και $\vec{\upsilon}_A$ είναι ίση με την COB που είναι ίση με την ABO. Έτσι το τρίγωνο των $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{\upsilon}_C$, $\vec{\upsilon}_{AC}$ είναι ισοσκελές ($\upsilon_C = \upsilon_{AC}$)

4) Για το άθροισμα δυο διανυσμάτων (συνισταμένη) είναι συχνά βολικότερη αντί για το παραλληλόγραμμο η χρήση του τριγώνου των διανυσμάτων και της συνισταμένης τους.

5) Η λύση της άσκησης γίνεται σχεδόν τετριμμένη αν χρησιμοποιηθεί ο στιγμιαίος άξονας (στο O' το συμμετρικό του O ως προς το C).

Δημήτρης Βλάχος