ΤΟ ΠΛΑΤΟΣ & Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ

Στα άκρα Α και Β μιας ομογενούς χορδής ΑΒ μήκους l=64cm που έχει την διεύθυνση του άξονα $x'ox$ υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής αρμονικών κυμάτων, που ταλαντώνονται με εξίσωση $y_A = y_B = A\eta\mu\omega t$ (S.I.).

Τα δύο αρμονικά κύματα διαδιδόμενα με αντίθετες φορές συμβάλλουν τη χρονική στιγμή t=0 στο μέσο Ο της χορδής που θεωρείται και η αρχή του άξονα $x'ox(x=0)$. Από τη συμβολή των δύο αρμονικών κυμάτων δημιουργείται στάσιμο κύμα και στο σημείο Ο δημιουργείται κοιλία. Ένα σημείο Ζ της χορδής (X_Z= -24cm) αρχίζει να ταλαντώνεται και μετά από χρόνο Δt=1,5s τετραπλασιάζεται η ενέργεια ταλάντωσης του. Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σημείου Ζ γίνεται μέγιστη 20 φορές σε χρόνο 5s. Όταν μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια του σημείου Ζ, η θέση του και η θέση του πλησιέστερου σε αυτό σημείου που επίσης έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα μήκους d=10cm.

Α. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ζ σε συνάρτηση με το χρόνο $y_Z(t)$ και να γίνει η γραφική παράσταση της.

B_1. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής y=f(x) τη χρονική στιγμή t=0,375s.

B_2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης των διαφόρων σημείων της χορδής ΑΒ σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή τους x από τη θέση Ο , φ=φ(x), τη χρονική στιγμή t=0,375s.

B_3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής ΑΒ σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή τους x από τη θέση Ο, $|A'| = |A'|(x)$.

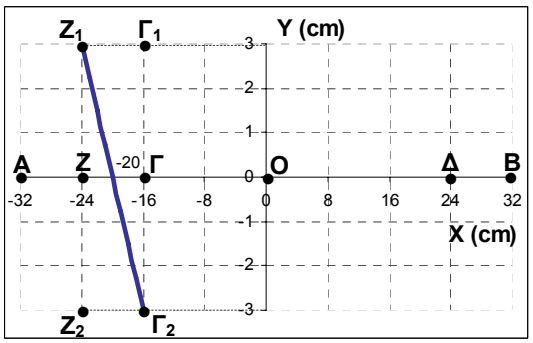
Γ. Να βρεθούν οι αποστάσεις που απέχουν από το σημείο Ο τα σημεία της χορδής, που μετά τη δημιουργία του στασίμου κύματος, ταλαντώνονται με ενέργεια ίση με το 25% της ενέργειας του σημείου Ζ και έχουν την ίδια φάση με αυτό. Να θεωρήσετε ότι όλα τα σημεία της χορδής ΑΒ έχουν την ίδια μάζα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Το κύμα που προέρχεται από την πηγή Α φθάνει στο σημείο $Z(x_z = -24cm)$ όταν το κύμα από την πηγή Β φθάνει στο σημείο $\Delta(x_\Delta = +24cm)$.

Η ενέργεια ταλάντωσης του Ζ τετραπλασιάζεται όταν το κύμα από την πηγή Β συμβάλλει με αυτό της πηγής Α στο Ζ.

Άρα $E_T = 4E_A \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = 4\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow |A'| = 2A \ (1)$. Δηλαδή το σημείο Ζ είναι κοιλία.



Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι:

$\upsilon = \frac{(\Delta Z)}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon = \frac{2\cdot 24}{1,5} \Rightarrow \upsilon = 32cm/s \Rightarrow \upsilon = 0,32m/s \ (2)$. Επειδή η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του Ζ μεγιστοποιείται 20 φορές σε χρόνο 5s, το σημείο Ζ θα φθάνει σε ακραία θέση ισάριθμες φορές, άρα θα έχει εκτελέσει N=10 πλήρεις ταλαντώσεις.

Η συχνότητα ταλάντωσης είναι $f = \frac{N}{t} \Rightarrow f = \frac{10}{5} = 2Hz \quad (3)$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής: $\upsilon = f\cdot\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} \lambda = 0,16m \ (4)$.

Αν Γ είναι η πλησιέστερη προς το Ζ κοιλία, τότε όταν τα σημεία αυτά βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς τους (μέγιστης δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης) Γ_2 και Z_1 αντίστοιχα, από το ορθογώνιο τρίγωνο

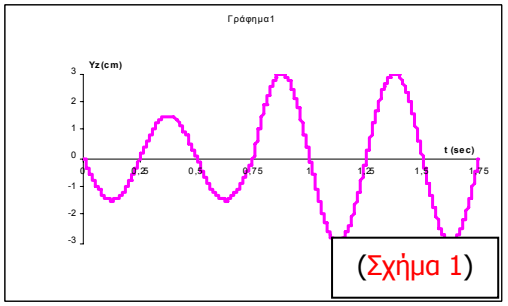
$Z_1\overset{\Delta}{Z_2}\Gamma_2 : (Z_1\Gamma_2)^2 = (Z_1Z_2)^2 + (Z_2\Gamma_2)^2 \Rightarrow d^2 = (4A)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \underset{(4)}{\Rightarrow} 10^2 = 16A^2 + 8^2 \Rightarrow A = 1,5cm \ (5)$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \overset{(3)(4)}{\underset{(5)}{\Rightarrow}} y = 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8}\cdot\eta\mu 4\pi t \ (6)$

$(t\ \sigma\varepsilon\ s\ \kappa\alpha\iota\ \ x, y\ \sigma\varepsilon\ cm)$.

Επειδή έχουμε ορίσει ως αρχή των χρόνων $(t=0)$ τη χρονική στιγμή που τα δύο κύματα συμβάλλουν στο μέσο $O(x_{(0)} = 0)$, στο σημείο Ζ θα συμβάλλουν τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{|OZ|}{\upsilon} \overset{(2)}{\Rightarrow} t_1 = \frac{0,24}{0,32} = 0,75s$.

Μέχρι τότε το σημείο Ζ ταλαντώνεται υπό την επίδραση του κύματος που παράγει η πηγή Α. Η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Ζ



(Σχήμα 1)

βρίσκεται ως εξής:
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα από την πηγή Α φθάνει στο μέσο Ο της ΑΒ και αυτό αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση $y_{(O)_A} = A\eta\mu\omega t$. Άρα το σημείο Ζ έχει εξίσωση ταλάντωσης:

$$y_z = A\eta\mu\omega\left(t + \frac{|OZ|}{u}\right) \Rightarrow y_z = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{|OZ|}{\lambda}\right) \Rightarrow \overset{(3),(4),(5)}{\Rightarrow} y_z = 1,5\eta\mu 2\pi\left(2t + \frac{24}{16}\right) \Rightarrow y_z = 1,5\eta\mu\left(4\pi t + 3\pi\right)$$

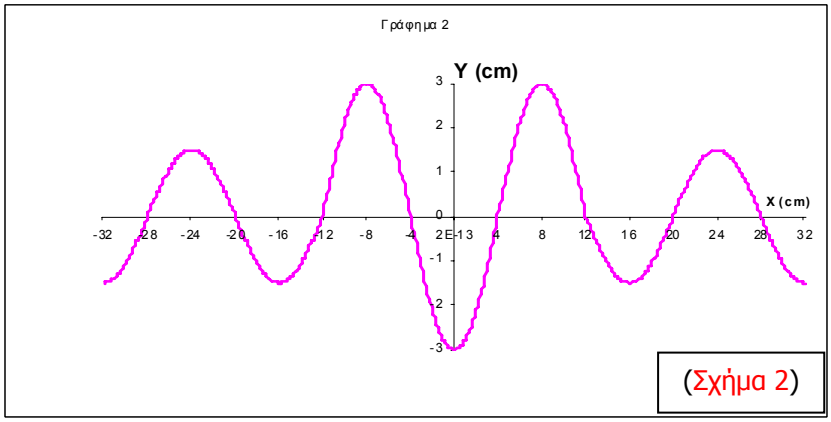
$\left(t \to s \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y_z \to cm\right)$ για $0 \le t \le 0,75s$.

Μετά την συμβολή των δύο κυμάτων στο Ζ και τη δημιουργία στάσιμου κύματος η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Ζ είναι:

Από $(6) \overset{x=x_z}{\Rightarrow} y_z = 3\sigma\upsilon\nu\pi\frac{(-24)}{8}\eta\mu 4\pi t \Rightarrow y_z = 3\sigma\upsilon\nu\left(-3\pi\right)\eta\mu 4\pi t$

$\Rightarrow y_z = -3\eta\mu 4\pi t \Rightarrow y_z = 3\eta\mu\left(4\pi t + \pi\right)$ $\left(t \to s \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y_z \to cm\right)$ για $t \ge 0,75s$. Η απομάκρυνση του σημείου Ζ σε συνάρτηση με το χρόνο απεικονίζεται στο (Σχήμα 1).

B_1. Τη χρονική στιγμή $t = 0,375\ s = \frac{3T}{4}$ τα κύματα έχουν συμβάλλει σε απόσταση $d = u \cdot t$ αριστερά και δεξιά του Ο. Άρα $\overset{(2)}{d} = 32 \cdot 0,375 \Rightarrow d = 12cm$. Επομένως στην περιοχή $-12cm \le x \le 12cm$ υπάρχει στάσιμο κύμα και οι περιοχές $-32cm \le x \le -12cm$ και $+12cm \le x \le +32cm$ της χορδής ταλαντώνονται μόνο υπό την επίδραση των κυμάτων που παράγουν οι πηγές Α και Β αντίστοιχα. Το στιγμιότυπο $y = f(x)$ της χορδής τη χρονική στιγμή $t = 0,375s$ απεικονίζεται στο (Σχήμα 2).



(Σχήμα 2)

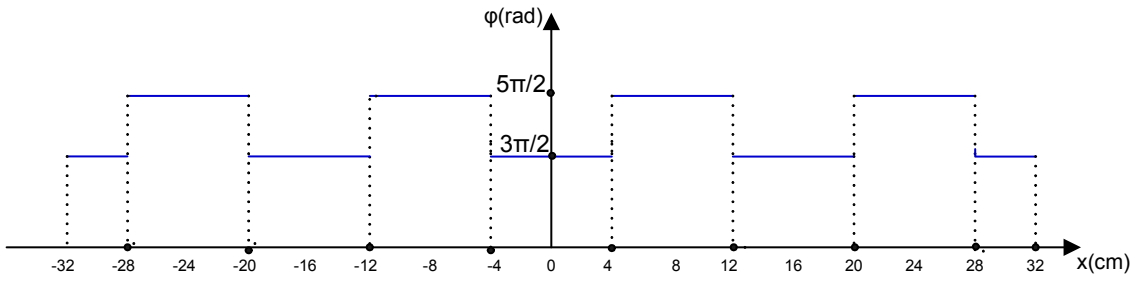
B_2. Από την εξίσωση (6) προκύπτει ότι:

Αν $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8} > 0$ η εξίσωση της ταλάντωσης γράφεται $y = 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8} \cdot \eta\mu 4\pi t$ και η φάση δίνεται από τη σχέση φ=4πt.

Αν $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8} < 0$ η εξίσωση της ταλάντωσης γράφεται $y = -3\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8}\right| \cdot \eta\mu 4\pi t \Rightarrow y = 3\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8}\right| \cdot \eta\mu(4\pi t + \pi)$ και η φάση δίνεται από τη σχέση φ=4πt+π.

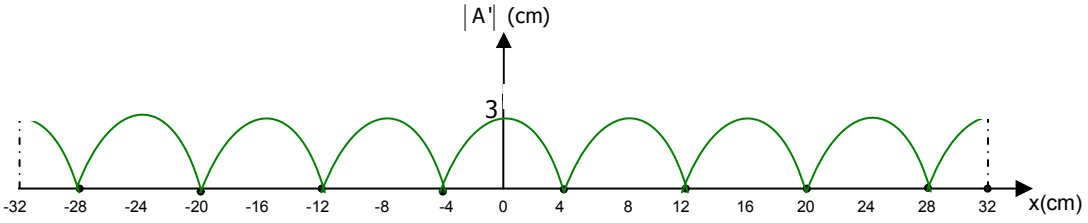
Θυμίζουμε ότι ο παράγοντας $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8}$ αλλάζει πρόσημο ανά $\frac{T}{2}$ δηλαδή μετά από απόσταση $\frac{\lambda}{2}$ (σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια φάση και σημεία εκατέρωθεν του ιδίου δεσμού και σε αποστάσεις μικρότερες από $\frac{\lambda}{2}$ από αυτόν έχουν διαφορά φάσης π).

Επομένως τη χρονική στιγμή $t = 0,375\,s$ οι φάσεις των διαφόρων σημείων μπορούν να παίρνουν τις τιμές φ=$\frac{3\pi}{2}$ ή φ=$\frac{5\pi}{2}$. Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x απεικονίζεται στο (Σχήμα 3).



(Σχήμα 3)

B_3. Το πλάτος ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής δίνεται από τη σχέση: $|A'| = 3\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8}\right|$. Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής απεικονίζεται στο (Σχήμα 4).



Γ. Από την σχέση $E = 25\%\ E_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{25}{100}\cdot\frac{1}{2}D(2A)^2 \Rightarrow |A'| = A\ (7)$.

Από την $(6)\underset{(5)}{\overset{(7)}{\Longrightarrow}} 3\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8}\right| = 1,5 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8} = \pm\frac{1}{2}$ (8). Για το σημείο Ζ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x_z}{8} < 0$, άρα για να έχουν τα ζητούμενα σημεία την ίδια φάση με το σημείο Ζ πρέπει $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8} < 0$. Από την (8) :

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{8} = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 16\kappa \pm \frac{16}{3}$ (9) με $\kappa = 0,1,2...(x \to cm)$.

Επειδή πρέπει $-32cm \le x \le 32cm$ από την σχέση (9) προκύπτει ότι $x = \pm\frac{16}{3}cm,\ \pm\frac{32}{3}cm,\ \pm\frac{64}{3}cm,\ \pm\frac{80}{3}cm$.

Άρα οι αποστάσεις των σημείων αυτών από το Ο είναι $d = \frac{16}{3}cm,\ \frac{32}{3}cm,\ \frac{64}{3}cm$ και $\frac{80}{3}cm$.

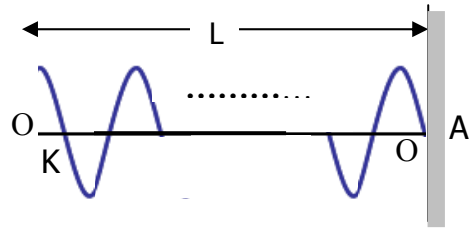
ΣΧΟΛΙΑ

1. Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση που ως χρονική στιγμή t=0 ορίζεται η χρονική στιγμή που συναντώνται τα δύο τρέχοντα αρμονικά κύματα, ο σχεδιασμός του στιγμιότυπου του στασίμου κύματος για οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή t θα περιορίζεται στην περιοχή: $-ut<x<ut$ στην οποία θα έχουν συμβάλει τα δύο τρέχοντα αρμονικά κύματα. Αριστερά της θέσης x=-ut υπάρχει μόνο το προς τα δεξιά διαδιδόμενο αρμονικό κύμα και αντίστοιχα δεξιά της θέσης x=+ut υπάρχει μόνο το προς τα αριστερά διαδιδόμενο αρμονικό κύμα.

2. Σε σχέση με το ερώτημα **Γ** υπενθυμίζεται ότι η απόσταση είναι η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης άρα έχει πάντα θετικές τιμές.

3. Με αφορμή αυτήν την ανάρτηση θέλω να αναφερθώ στο σχηματισμό στασίμου κύματος σε χορδή μήκους L όπου το ένα άκρο της είναι ακίνητο και στο άλλο ελεύθερο άκρο της μας **δίνεται** ότι σχηματίζεται **κοιλία**. Το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται στη χορδή ΟΑ υπολογίζεται ως εξής:

1ος τρόπος



Εάν θεωρήσουμε ότι ο δεσμός στη θέση Α είναι ο **κ τάξης** τότε: $x_\kappa=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow$

$L=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}$ $(1) \Rightarrow ...\kappa=\frac{2L}{\lambda}-\frac{1}{2}$ με κ=0,1,2...

Πχ. εάν κ=3 έχουν σχηματιστεί **4** δεσμοί (κ=0,1,2,3).

2ος τρόπος

Εάν θεωρήσουμε ότι στη χορδή ΟΑ σχηματίζονται **κ'** (πλήθος) δεσμοί τότε: $L=\frac{\lambda}{4}+(\kappa'-1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$L=(2\kappa'-1)\frac{\lambda}{4}$ $(2) \Rightarrow ...\kappa'=\frac{2L}{\lambda}+\frac{1}{2}$ με κ'=0,1,2,3...

Πχ. εάν κ'=4 έχουν σχηματιστεί **4** δεσμοί. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν στη σχέση (2) θέσουμε κ'=κ-1 προκύπτει η σχέση (1).

Ξ. Στεργιάδης