

Γιατί $\Sigma F = - D\mathbf{x}$ και όχι $\Sigma F = D\mathbf{x}$ στην α.α.τ ;
Μια πολύ ενδιαφέρουσα ερώτηση.

Μια σύντομη "εξομολόγηση"

Φέτος άκουσα το κουδούνι του "αγιασμού" από το μπαλκόνι μου.
Ο ήχος του ο πιο "οξύς" και ταυτόχρονα ο πιο "βαρύς"
που άκουσα όσα χρόνια είχα σχέση με την εκπαίδευση.
Ναι φέτος δεν θα είμαι...*εκεί*.
Δίπλα στα "άτακτα ... παρατεταγμένα" παιδιά.
Στα παιδιά με *την Δύναμη την Ζωντάνια και τα Όνειρα*.
Ο ήχος από το κουδούνι.
Σαν διεγέρτης εξανάγκασε την καρδιά μου σε απαγορευτικές συχνότητες.
Σαν να με "*ξύπνησε*" από τον λήθαργο που "*έπεσα*"
και ... με την βοήθεια των επιχειρημάτων φίλων και γνωστών.
- Τυχερέ ...εσύ πρόλαβες.
- Ησύχασες.
- Δεν θα έχεις πια κανένα στο κεφάλι σου.
Και πολλά άλλα γνωστά. Όμως πιστέψτε με .
Μου λείπει πολύ η Σχολική τάξη. Η αταξία της αυλής.
Οι Φωνές ...τα Γέλια...τα Όνειρα και οι Ελπίδες των Παιδιών.
Καθισμένος στο μπαλκόνι μου μελαγχολώ για την απουσία.
Με σκουντώ. Και ξαφνικά αρχίζω τον μονόλογο. Εγώ ...με εμένα.
- Εύπνα Γιάννη. Προσαρμόσου. Έχεις ... να κάνεις.
- Μα "*δεν έχω ήχο ...δεν έχω υλικό*" όπως λέει ...και ο Σαββόπουλος.
- Έχεις και "*ήχο και υλικό*". Τόσα χρόνια μες την σχολική τάξη.
Έστω κάνε ένα μάθημα σε μια ... "*νοητή τάξη*".
Γράψε για τα ερωτήματα των μαθητών που δημιουργούν
οι διδακτικές μας αστοχίες .
- Δεν έχεις άδικο...και είναι πολλά και ενδιαφέροντα.
Έχω ένα επίκαιρο...να το δούμε;
- Έτσι μπράβο.

Αξίζει να ακούσω και την γνώμη της παρέας μας...στο Yliko.gr.

Καλή Σχολική Χρονιά...Φίλοι μου.

Η ιδέα της ανάρτησης.

Η τάξη "βρίσκεται" στην δυναμική μελέτη της α.α.τ. Όλα σχεδόν τα παιδιά την έχουν ακούσει από την... "καλοκαιρινή" προετοιμασία. Ο Γιώργος ρωτάει.

Γ: - Μα κάθε φορά πρέπει να "δείχνουμε" ότι ένα σώμα κάνει α.α.τ όταν δεν μας το δίνουν;

Η Μαρία πάντα της λεπτομέρειας και της τυπικότητας ... απαντά.

Μ: - Έτσι γράφει το σχολικό βιβλίο στο ... Παράδειγμα 1.1.

Γ: - Δηλαδή θα δείχνουμε πάντα ότι : $\Sigma F = - Dx$;

Ρώτησε με μια φανερή δυσφορία ο Γιώργος.

Η Σοφία όμως φαινόταν προβληματισμένη.

Σ: - Εγώ κύριε έχω ένα πρόβλημα . Δεν μου βγαίνει πάντα το μείον (-) στην σχέση $\Sigma F = - Dx$. Είναι λάθος;

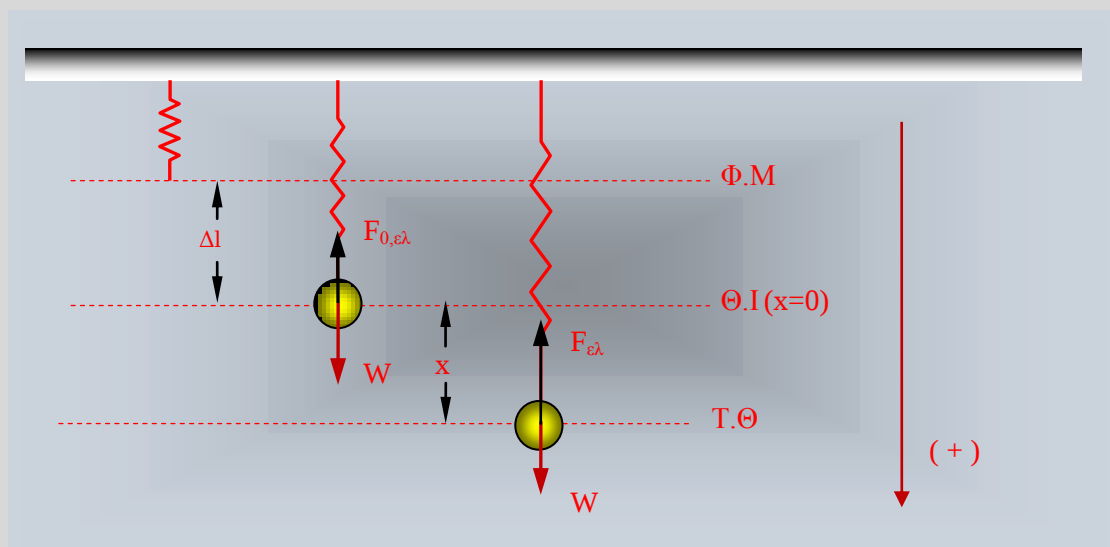
Γ: - Δεν θα παίρνεις ... σωστά την θετική φορά.

Απάντησε ο Γιώργος.

Σ: - Εσύ πως επιλέγεις την θετική φορά;

Ρώτησε η Σοφία.

Γ: - Απλά θεωρώ θετική φορά ... την φορά της αρχικής απομάκρυνσης. Έτσι όπως δείχνει το σχήμα. Έτσι πάντα βγαίνει η σχέση: $\Sigma F = - Dx$



Να δες και την απόδειξη.

$$\Theta.I : \Sigma F = 0 \rightarrow mg - k\Delta l = 0 \quad (1)$$

$$T.\Theta : \Sigma F = mg - k(\Delta l + x) \rightarrow \Sigma F = -kx \quad \text{θέτω } D = k$$

και προκύπτει : $\Sigma F = -Dx$ άρα Α.Α.Τ.

Απάντησε πάλι ο Γιώργος με πολύ μεγάλη σιγουριά.

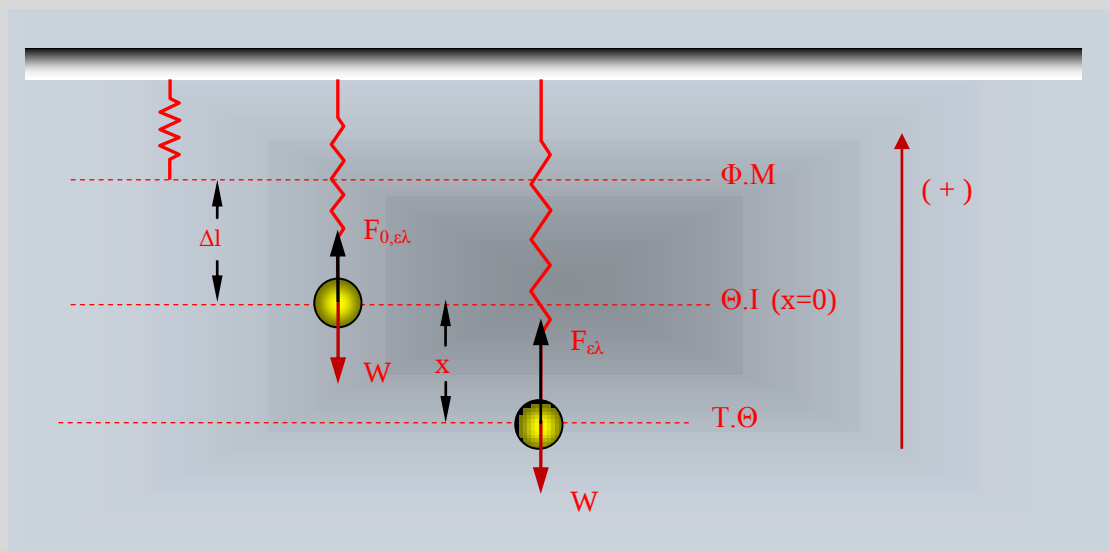
Η Σοφία όμως είναι αποφασισμένη να μην αφήσει τον Γιώργο στην σιγουριά του.

Σ: - Δηλαδή αν την πάρω αντίθετη φορά το σώμα ...δεν θα κάνει Α.Α.Τ;
Ρώτησε με κάποια δόση επιθετικότητας η Σοφία.

Γ: - Τι λες ρε Σοφία τώρα; Είναι δυνατόν;

Δεν πρόκειται να βγάλεις ότι η $\Sigma F = -Dx$. Άρα δεν θα κάνει Α.Α.Τ.

Σ: - Ναι ρε Γιώργο. Δες παρακάτω και πες μου που κάνω το λάθος.



$$\Theta.I : \Sigma F = 0 \rightarrow mg - k\Delta l = 0 \quad (1)$$

$$T.\Theta : \Sigma F = -mg + k(\Delta l + x) \rightarrow \Sigma F = kx \quad \text{θέτω } D = k$$

και προκύπτει : $\Sigma F = Dx$.

Που είναι το λάθος;

Γ: - Δεν βλέπω λάθος.

Όμως δεν θα κάνει Α.Α.Τ αφού η (ΣF) δεν είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$.

Επιμένει ο Γιώργος.

Η Μαρία παρακολουθούσε με προσοχή όμως τελικά... δεν άντεξε.

M: - Μα καλά ...τι μαγικά είναι αυτά ρε Γιώργο;

Επειδή η Σοφία πήρε άλλη φορά το σώμα δεν θα κάνει Α.Α.Τ ;

Δηλαδή αν ένα σώμα θα κάνει Α.Α.Τ ... θα το καθορίζει η φορά που θα επιλέξω ; Τους Νόμους της Φυσικής τους καθορίζει ...μια υποκειμενική επιλογή ;

Εγώ ... στο πίσω μέρος της τάξης χαμογελώ ενθουσιασμένος από την εξέλιξη της συζήτησης. Η Μαρία με "σκούντησε".

M: - Κύριε γιατί δεν μιλάτε; Έχει δίκιο ο Γιώργος;

Γ.Δ.: - Η απόδειξη που μας έκανε ο Γιώργος είναι σωστή.

Όμως Γιώργο ποια είναι τα κριτήρια για να κάνει ένα σώμα Α.Α.Τ σύμφωνα με αυτά που μαθαίνετε;

1^ο : Η (ΣF) να είναι ανάλογη της απομάκρυνσης .

2^ο : Η (ΣF) έχει κατεύθυνση προς την θέση ισορροπίας.

Δηλαδή η ποιότητα της δύναμης θα καθορίσει το είδος της κίνησης.

Για δες. Ισχύουν στην περίπτωση που αναφέρει η Σοφία;

Ο Γιώργος ξανακοίταξε την λύση της Σοφίας και απάντησε με κάποια έκπληξη και επιφύλαξη μαζί.

Γ: - Η $F_{ελ} = k(\Delta l + x) > W$ άρα η (ΣF) έχει κατεύθυνση προς την Θ.Ι. και είναι ανάλογη της απομάκρυνσης $\Sigma F = Dx$.

Δηλαδή κύριε θα κάνει Α.Α.Τ. Και η σχέση $\Sigma F = -Dx$;

Σ: - Κύριε μπορώ να γράψω : $\Sigma F = -D|x|$. Πετάχτηκε η Σοφία.

Έκανα πως δεν το άκουσα γιατί ήθελα να τονίσω ...την φυσική πλευρά.

Γ.Δ.: - Ναι Γιώργο. Η (ΣF) είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει κατεύθυνση προς την θέση ισορροπίας. Άρα είναι δύναμη επαναφοράς.

Είναι λάθος η άποψη σου Γιώργο ότι... δεν θα κάνει Α.Α.Τ.

Γενικά: Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένα σώμα κάνει Α.Α.Τ. πρέπει να ελέγχουμε τα κριτήρια:

1^ο : Η (ΣF) να είναι ανάλογη της απομάκρυνσης .

2^ο : Η (ΣF) έχει κατεύθυνση προς την θέση ισορροπίας.

Διαφορετικά θα έχουμε τα παραπάνω ...μπερδέματα.

Όμως θα ήθελα να το τονίσω άλλη μια φορά:
Η ποιότητα της δύναμης θα καθορίσει το είδος της κίνησης
και όχι η φορά που θα επιλέξω
ή πιο απλά...με την βασική αρχή της Κλασικής Μηχανικής
"Δώσε μου την δύναμη ... να σου πω την κίνηση".

Ο Γιώργος ανήσυχος ρώτησε.

Γ: - Νόμιζα κύριε ότι η επιλογή φοράς μας δίνει την Α.Α.Τ.
 Μήπως είναι εύκολο να μας δώσετε την ποιοτική διαφορά των δυνάμεων
 $\Sigma F = -Dx$ και $\Sigma F = Dx$.

Γ.Δ: - Ναι Γιώργο.
 Αν πάρουμε το ίδιο σύστημα αναφοράς (π.χ. ένα κοινό άξονα χ'οχ)
 και στις δύο δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{και} \quad \Sigma F = Dx$$

θα βρούμε ότι είναι... ποιοτικά εντελώς διαφορετικές

Η $\Sigma F = -Dx$
 είναι μια δύναμη που... τείνει να επαναφέρει το σώμα στην Θ.Ι.

Η $\Sigma F = Dx$
 είναι μια δύναμη που... απομακρύνει συνεχώς το σώμα από την Θ.Ι.

Η μαθηματική επεξεργασία ... πάνω στον 2^ο Νόμο του Νεύτωνα
αυτό θα μας δείξει.

Ο Γιώργος η Σοφία και η Μαρία...ρώτησαν ταυτόχρονα:

- Ποια είναι αυτή η μαθηματική επεξεργασία;
 Μπορείτε να μας την δείξετε ;

Ο Γιώργος η Σοφία και η Μαρία
σήμερα...είναι φοιτητές στους ΗΜΜΥ του ΕΜΠ και στην Ιατρική
τους είχα υποσχεθεί ότι του ...χρόνου
"θα τους την πω γιατί ...τότε μπορούν να την κατανοήσουν".

Καλό δρόμο παιδιά...Σας ευχαριστώ.

Ας κάνουμε όμως ακόμα ένα βήμα παρακάτω.
Θα μελετήσουμε την κίνηση που μπορεί να κάνει ένα σώμα όταν του ασκούνται χωριστά οι παραπάνω δυνάμεις.

Η εκφώνηση

Σώμα (m) μπορεί να κινείται πάνω στον προσανατολισμένο άξονα x'Ox.
Την στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = A$
και έχει ταχύτητα μέτρου $v = 0$.

Πρόταση 1^η

Να γράψετε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος όταν η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται είναι :

α. $\Sigma F = Dx$ και β. $\Sigma F = -Dx$

όπου $D > 0$ θετική σταθερά και x η απομάκρυνση από την θέση $x = 0$.

Απάντηση

α. Από τον 2^ο Νόμο του Νεύτωνα και με την βοήθεια της σχέσης

$\Sigma F = Dx$ προκύπτει :

$$\Sigma F = Dx \text{ αλλά } \Sigma F = ma \rightarrow ma = Dx$$

$$ma = Dx \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = Dx \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} - Dx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{D}{m} x = 0$$

Θέτω $\frac{D}{m} = \omega^2$ και τελικά έχω την διαφορική εξίσωση κίνησης όταν :

$$\Sigma F = Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0 \text{ ή } \ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

β. Με όμοιο ακριβώς τρόπο διαμορφώνουμε την διαφορική εξίσωση κίνησης όταν: $\Sigma F = -Dx$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{ή} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά τους είναι το πρόσημο (-) .

Θα έλεγε κάποιος ... ‘μικρό το κακό’!!!!

Όμως εδώ ακριβώς βρίσκεται και η τεράστια απόσταση που χωρίζει τα είδη των κινήσεων που εκφράζουν οι δύο σχέσεις.

Πρόταση 2^η

Να γίνει η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης που προκύπτει όταν η συνισταμένη δύναμη δίνεται από την σχέση $\Sigma F = Dx$:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

και με αρχικές συνθήκες :

Για : $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = A$ και έχει ταχύτητα $v = 0$.

Απάντηση

Είναι φανερό ότι για να ισχύει η διαφορική εξίσωση :

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad \text{πρέπει να ισχύει} \quad \ddot{x} = \lambda^2 x$$

$$\lambda^2 x - \omega^2 x = 0 \rightarrow (\lambda^2 - \omega^2)x = 0 \rightarrow \lambda^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \omega$$

Έτσι οι δύο μερικές λύσεις της διαφορικής είναι :

$$x_1(t) = c_1 e^{\omega t} \quad \text{και} \quad x_2(t) = c_2 e^{-\omega t}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός τους θα αποτελεί και αυτός λύση.

$$x(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

Ας δούμε όμως μια σύντομη επαλήθευση.

Παίρνω την 1^η παράγωγο ως προς τον χρόνο της λύσης:

$$x(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

$$\dot{x}(t) = \omega c_1 e^{\omega t} - \omega c_2 e^{-\omega t}$$

και στην συνέχεια την δεύτερη

$$\ddot{x}(t) = \omega^2 c_1 e^{\omega t} + \omega^2 c_2 e^{-\omega t} \rightarrow \ddot{x}(t) = \omega^2 (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}) \rightarrow$$

$$\ddot{x}(t) = \omega^2 x$$

Αντικαθιστώ στην διαφορική εξίσωση και προκύπτει :

$$\omega^2 x - \omega^2 x = 0$$

άρα ο γραμμικός συνδυασμός τους θα αποτελεί και αυτός λύση της .

Ας προχωρήσουμε όμως ακόμα στον προσδιορισμό της λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Με την βοήθεια των αρχικών συνθηκών :

Για : $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = A$

και έχει ταχύτητα $v = 0$ ή $\dot{x}(0) = 0$ προκύπτει

$$\left. \begin{aligned} x(0) = A &\rightarrow c_1 + c_2 = A \\ \dot{x}(0) = 0 &\rightarrow c_1 - c_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

και τελικά: $c_1 = c_2 = \frac{A}{2}$.

Η γενική λύση μπορεί να γραφεί τώρα:

$$x(t) = \frac{A}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \rightarrow x(t) = A \left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right)$$

Όμως έχουμε φτάσει σε "**κάτι**" που προκαλεί ...**μια ευχάριστη έκπληξη**.

$$\text{Η σχέση : } \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \cosh x$$

το ξεχασμένο μας... "**υπερβολικό συνημίτονο**"!!!!

Ο συμβολισμός ($\cosh x$) οφείλεται στον Ιταλό Ιησουίτη μοναχό Vincenzo Riccati (1707-1775).

Ο Riccati εισήγαγε για αυτές τον συμβολισμό $\text{Ch}x$ και $\text{Sh}x$ ο οποίος παρέμεινε σχεδόν αναλλοίωτος μέχρι τις μέρες μας. Ήταν ο πρώτος που μελέτησε τις ιδιότητες τους. Ο συμβολισμός $\cosh x$ (υπερβολικό συνημίτονο) και $\sinh x$ (υπερβολικό ημίτονο) έχει καθιερωθεί διεθνώς. Στα ελληνικά δεν έχει καθιερωθεί άλλος συμβολισμός.

Άρα η τελική μας εξίσωση κίνησης που θα κάνει το σώμα όταν η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται $\Sigma F = D\dot{x}$ είναι :

$$x(t) = A \cosh(\omega t)$$

Μια απρόβλεπτη ...και πολύ όμορφη εξίσωση κίνησης.

Πρόταση 3^η

Να γίνει η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης που προκύπτει όταν η συνισταμένη δύναμη δίνεται από την σχέση $\Sigma F = -Dx$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

και με αρχικές συνθήκες :

Για : $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = A$ και έχει ταχύτητα $v = 0$.

Απάντηση

Είναι φανερό ότι για να ισχύει η διαφορική εξίσωση :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ πρέπει να ισχύει } \ddot{x} = \lambda^2 x$$

$$\lambda^2 x + \omega^2 x = 0 \rightarrow (\lambda^2 + \omega^2)x = 0 \rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega$$

Έτσι οι δύο μερικές λύσεις της διαφορικής είναι :

$$x_1(t) = c_1 e^{i\omega t} \text{ και } x_2(t) = c_2 e^{-i\omega t}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός τους θα αποτελεί και αυτός λύση.

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Η επαλήθευση γίνεται όπως παραπάνω.

Με την βοήθεια των αρχικών συνθηκών :

Για : $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = A$
και έχει ταχύτητα $v = 0$ ή $\dot{x}(0) = 0$ προκύπτει

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= A \rightarrow c_1 + c_2 = A \\ \dot{x}(0) &= 0 \rightarrow c_1 - c_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

και τελικά: $c_1 = c_2 = \frac{A}{2}$.

Η γενική λύση μπορεί να γραφεί τώρα:

$$x(t) = \frac{A}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

Με την βοήθεια του τύπου του Euler :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Η γενική λύση μπορεί να γραφεί τώρα :

$$x(t) = \frac{A}{2} (\cos \omega t + i \sin \omega t + \cos \omega t - i \sin \omega t) \rightarrow$$

$$x(t) = A \cos \omega t$$

Η γνωστή εξίσωση της Α.Α.Τ.

Συμπέρασμα

Η εξίσωση της κίνησης που θα κάνει το σώμα όταν η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται $\Sigma F = Dx$ είναι :

$$x(t) = A \cosh(\omega t)$$

ενώ η εξίσωση της κίνησης που θα κάνει το σώμα όταν η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται $\Sigma F = -Dx$ είναι :

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

Μια απρόσμενη ...αρμονία.

Πρόταση 4^η

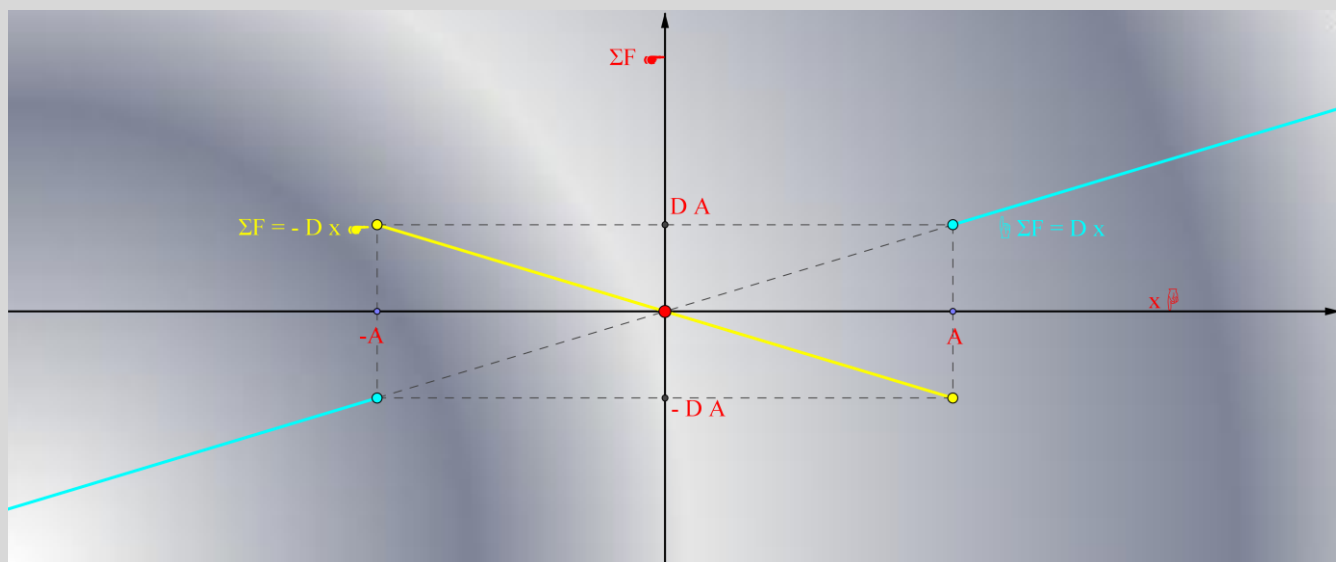
Για να γίνουν πολύ πιο αισθητές οι ποιοτικές διαφορές ανάμεσα στις παραπάνω δυνάμεις και τις κινήσεις που δίνουν να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις :

α. Των σχέσεων που δίνουν τις δυνάμεις : $\Sigma F = -Dx$ και $\Sigma F = Dx$ σε κοινό διάγραμμα.

β. Των σχέσεων που δίνουν τις εξισώσεις κίνησης των παραπάνω δυνάμεων σε κοινό διάγραμμα.

Απάντηση

α. Κοινό διάγραμμα των σχέσεων που δίνουν τις δυνάμεις : $\Sigma F = -Dx$ και $\Sigma F = Dx$ με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Για : $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = A$ και έχει ταχύτητα $v = 0$ ή $\dot{x}(0) = 0$.



Η $\Sigma F = -Dx$ είναι δύναμη επαναφοράς άρα οι τιμές της

$$-DA \leq \Sigma F \leq DA$$

Η $\Sigma F = Dx$ είναι δύναμη απομάκρυνσης με τιμές

$$DA \leq \Sigma F$$

β. Κοινό διάγραμμα των σχέσεων:

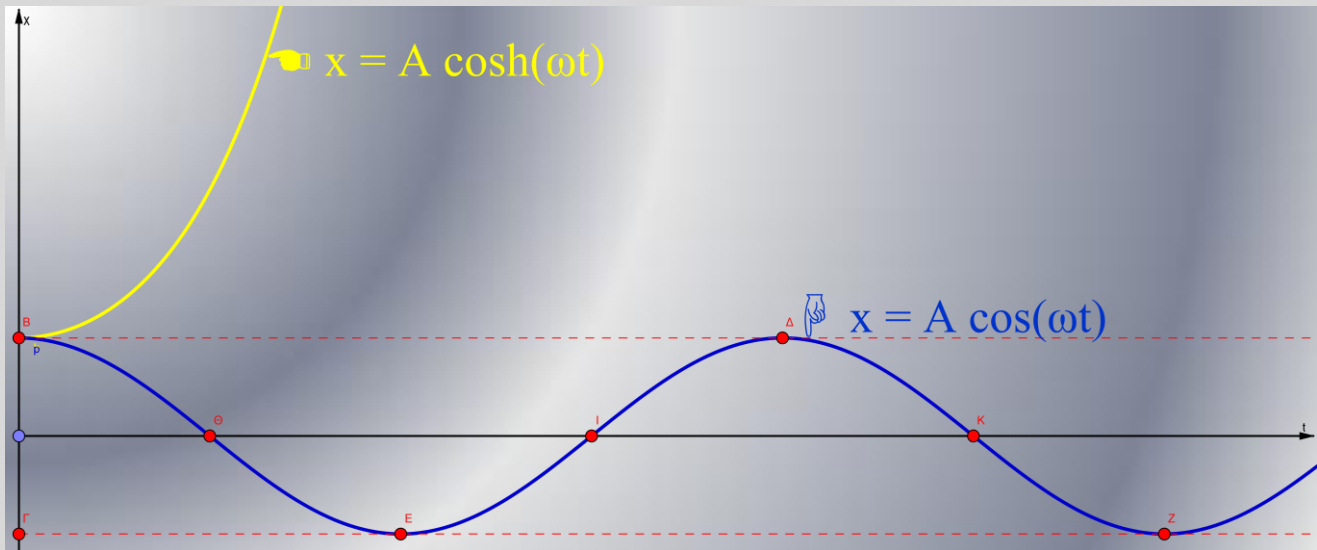
$$x(t) = A \cosh(\omega t) \text{ που προκύπτει από την } \Sigma F = Dx$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) \text{ που προκύπτει από την } \Sigma F = -Dx$$

με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Για : $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = A$

και έχει ταχύτητα $v = 0$ ή $\dot{x}(0) = 0$.



Ο επίλογος

Η εργασία αυτή έχει σκοπό να προσθέσει ένα μικρό λιθαράκι στην διδασκαλία αλλά και στην κατανόηση του πραγματικά δύσκολου προβλήματος της Α.Α.Τ.

Αν τα κατάφερε ...εσείς θα κρίνετε αγαπητοί μου φίλοι.

Οι παρατηρήσεις σας, οι διαφωνίες σας, οι συμπληρώσεις σας είναι πάντα χαρά για μένα.

Υ.Γ. Χρησιμοποίησα τους συμβολισμούς $\sinh x$ και $\cosh x$ διότι χρειάστηκε ο συμβολισμός $\cosh x$ που δεν υπάρχει στα ελληνικά.

Γιάννης Ν. Δογμαματζάκης