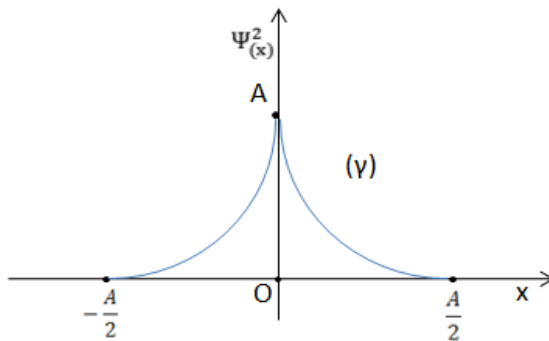
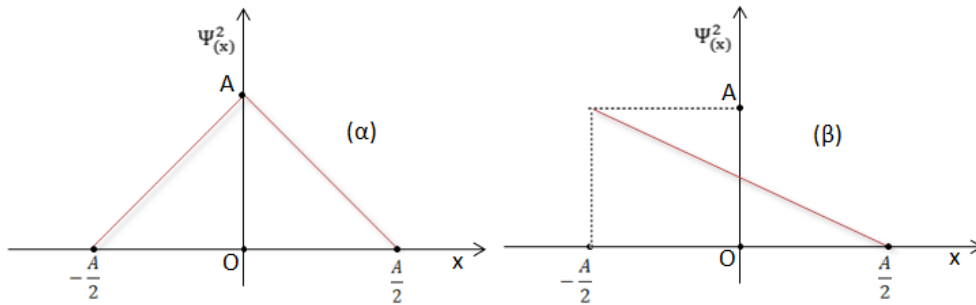


ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ- ΘΕΜΑΤΑ Β.

Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι: $\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{A - 2|x|}, & -\frac{A}{2} \leq x \leq \frac{A}{2} \\ 0, & x < -\frac{A}{2}, x > \frac{A}{2} \end{cases}$

Α. Ποια από τις παρακάτω είναι η γραφική παράσταση της $\Psi^2(x)$ -x ;



Β. Η κυματοσυνάρτηση που πληροί τη συνθήκη κανονικοποίησης - η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση - είναι η

$$\alpha. \Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - 2|x|}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x < -\frac{1}{2}, x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\beta. \Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - |x|}, & -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < -2, x > 2 \end{cases}$$

$$\gamma. \Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\sqrt{2} - 2|x|}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0, & x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Γ. Η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στην περιοχή $(0, \frac{\sqrt{2}}{4})$ είναι

α. 0,375 β. 0,5 γ. 0,25

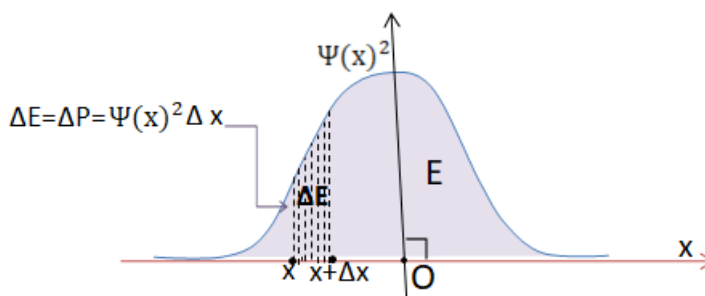
Επιλέξτε το σωστό και δικαιολογήστε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Είναι $\Psi^2(x) = \begin{cases} A - 2|x|, & -\frac{A}{2} \leq x \leq \frac{A}{2} \\ 0, & x < -\frac{A}{2}, x > \frac{A}{2} \end{cases}$

Η $\Psi^2(x)$ είναι συνάρτηση 1^{ου} βαθμού για $x > 0$ και για $x < 0$ (οπότε δεν είναι η γ) και $\Psi^2(-\frac{A}{2}) = 0$ (οπότε δεν είναι η β). Συνεπώς η γραφική παράσταση της $\Psi^2(x)$ είναι η α .

B. Έστω $\Psi(x)$ μια κυματοσυνάρτηση. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση $\Psi^2(x) - x$.



Είναι γενικά $\frac{dP}{dV} = |\Psi^2(x, y, z)| \rightarrow dP = |\Psi^2(x, y, z)| dV$. Σε μονοδιάστατη κίνηση όπως στη περίπτωση μας είναι: $dP = |\Psi^2(x)| dx$ ή $\Delta P = |\Psi^2(x)| \Delta x$. Το στοιχειώδες γραμμοσκιασμένο εμβαδό ΔE είναι $\Delta E = \Psi^2(x) \Delta x = \Delta P$ δηλαδή, ισούται με την πιθανότητα ΔP εύρεσης του σωματιδίου στη περιοχή εύρους Δx . Το Δx είναι πολύ μικρό ώστε η γραμμοσκιασμένη περιοχή να θεωρείται ορθογώνιο. Γενικεύοντας, το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\Psi^2(x)$ και του άξονα $x'x$ σε οποιαδήποτε περιοχή $x_1 < x < x_2$ όχι υποχρεωτικά στοιχειώδη, μας δίνει την πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου σε αυτή τη περιοχή. Προκύπτει με χωρισμό της κάθε περιοχής σε στοιχειώδη εμβαδά ΔE_i , εύρους Δx_i , $\Delta E_i = \Psi^2(x) \Delta x_i$, $i=1,2,\dots,n$ και πρόσθεσή τους:

$$E = P = \sum_{i=1}^n \Psi^2(x) \Delta x_i.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω για το ολικό το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\Psi^2(x)$ και του άξονα $x'x$ για $-\infty < x < +\infty$ έχουμε:

$E = E_{\text{ολ}} = \int \Psi^2(x) dx = P = 1$ Η τιμή $P=1$ οφείλεται στη συνθήκη κανονικοποίησης που στηρίζεται στο γεγονός ότι είναι βέβαιο ($P=1$) ότι το σωματίδιο βρίσκεται κάπου στον άξονα $x'x$, που είναι και η ουσία της συνθήκης αυτής ($\int \Psi^2(x) dx = 1$).

Από σχήμα (α) για $-\infty < x < +\infty$ έχουμε: $E=P=1$ ή $\frac{1}{2} A A=1$ ή $\frac{A^2}{2} = 1$ ή $A = \sqrt{2}$.

Άρα η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση είναι η

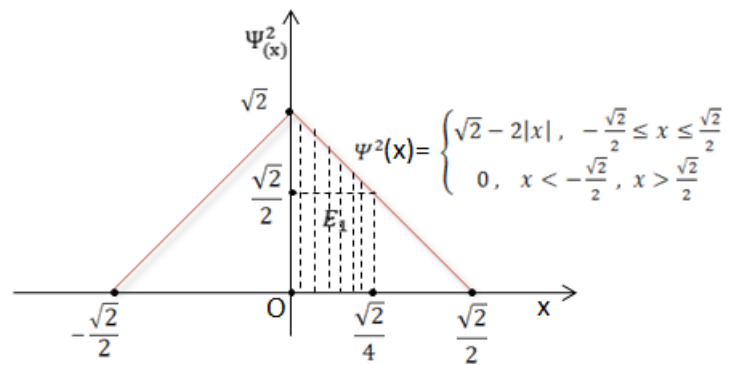
$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\sqrt{2} - 2|x|}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0, & x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Σωστό το γ.

Γ. Σύμφωνα με τα παραπάνω η ζητούμενη πιθανότητα θα βρεθεί από τη γραφική παράσταση $\Psi^2(x)$ - x μέσω εμβαδού. Όπου $\Psi(x)$ όμως θα πάρουμε τη κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση οπότε θα είναι:

$$\Psi^2(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - 2|x|, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0, & x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Σύμφωνα με το σχήμα:



$$P_{(0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4})} = E_1.$$

$$\text{Η } P_{(0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4})} = \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ Σωστό το α.}$$