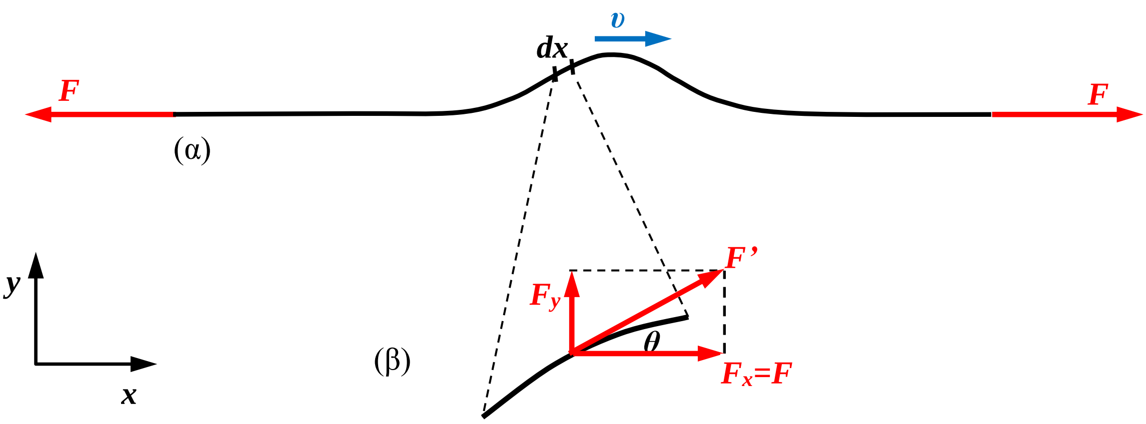
ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ
Κύματα κατά μήκος τεντωμένου νήματος

Στο τεντωμένο με δύναμη $\boldsymbol{F}$ νήμα του Σχήματος 1.1α δημιουργούμε μια εγκάρσια διαταραχή (παράλληλη με τη διεύθυνση y) η οποία διαδίδεται ως μηχανικό κύμα κατά μήκος του νήματος (παράλληλα με τη διεύθυνση x) με ταχύτητα υ. Όταν η διαταραχή αυτή διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο του νήματος, ένα τμήμα dx του νήματος που βρίσκεται στο τυχαίο αυτό σημείο θα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας όπως περίπου δείχνει το μεγεθυμένο Σχήμα 1.1β.



ΣΧΗΜΑ 1.1

Σε κάθε σημείο του κυματικού παλμού, η δύναμη F' που ασκείται πάνω στο νήμα είναι εφαπτομενική στο σημείο αυτό. Αναλύοντας τη δύναμη F' στις συνιστώσες F_x και F_y έχουμε:

$$F_x = F \qquad (1.1)$$

$$F_y = F_x tan\theta \qquad (1.2)$$

Όπου $tan\theta$ είναι η κλίση του νήματος στην περιοχή του στοιχειώδους τμήματος dx. Εξ ορισμού:

$$tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1.3)$$

Από τις Σχέσεις 1.1, 1.2 και 1.3 παίρνουμε:

$$F_y = F\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1.4)$$

Ο κυματικός παλμός του Σχήματος 1.1 περιγράφεται με την κυματική εξίσωση:

$$y(x,t) = f(x \pm \upsilon t) \qquad (1.5)$$

Η πρώτη μερική παράγωγος της κυματικής συνάρτησης $y(x,t)$ ως προς x και ως προς t είναι αντίστοιχα:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial[f(x \pm \upsilon t)]}{\partial x} = \frac{\partial[f(x \pm \upsilon t)]}{\partial(x \pm \upsilon t)}\frac{\partial(x \pm \upsilon t)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial[f(x \pm \upsilon t)]}{\partial(x \pm \upsilon t)} \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial[f(x \pm \upsilon t)]}{\partial t} = \frac{\partial[f(x \pm \upsilon t)]}{\partial(x \pm \upsilon t)} \frac{\partial(x \pm \upsilon t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial[f(x \pm \upsilon t)]}{\partial(x \pm \upsilon t)}(\pm\upsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\pm\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial[f(x \pm \upsilon t)]}{\partial(x \pm \upsilon t)} \qquad (1.7)$$

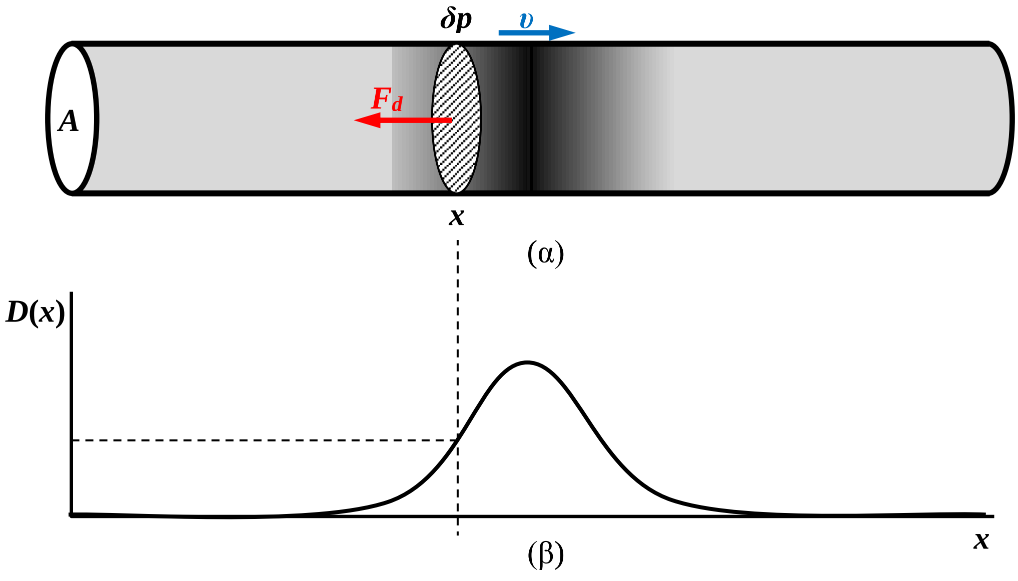
Τα δεύτερα μέλη των Σχέσεων 1.6 και 1.7 είναι ίσα, οπότε και τα πρώτα μέλη θα είναι ίσα:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial y}{\partial t} = \pm\frac{1}{\upsilon}\upsilon_y \quad \Rightarrow \quad \upsilon_y = \pm\upsilon\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1.8)$$

2. ΔΙΑΜΗΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

2.1 Επίπεδα Διαμήκη Κύματα – Κύματα σε αέρια στήλη.

Στο αριστερό άκρο της αέριας στήλης του Σχήματος 2.1α δημιουργούμε ένα πύκνωμα αέρα το οποίο εξελίσσεται σε διάμηκες κυματικό παλμό που διαδίδεται με ταχύτητα υ κατά μήκος της αέριας στήλης. Το Σχήμα 2.1β απεικονίζει τη μετατόπιση των μορίων του αέρα από τη θέση ισορροπίας του διαμήκους κυματικού παλμού.



ΣΧΗΜΑ 2.1

Τη χρονική στιγμή t το διάμηκες κύμα έχει φθάσει στη θέση *x* στην οποία τα μόρια του αέρα έχουν:

Στιγμιαία μετατόπιση $D(x,t) = f(x \pm \upsilon t)$ (2.1)

Στιγμιαία ταχύτητα : $\upsilon_d = \dfrac{\partial D(x,t)}{\partial t}$ (2.2)

Την ίδια χρονική στιγμή στη θέση x, η στιγμιαία μεταβολή δ*p* της πίεσης του αέρα και η στιγμιαία δύναμη επαναφοράς των μορίων του αέρα προς τη θέση ισορροπίας θα είναι αντίστοιχα ίσες με:

$$\delta p = -B\frac{\partial D}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad F_d = A(\delta p) = -BA\frac{\partial D}{\partial x} \qquad (2.3)$$

Η Σχέση 1.8 ισχύει και για τα μηχανικά διαμήκη κύματα στα οποία, για καθαρά πρακτικούς λόγους θέτουμε όπου $D(x,t)=y(x,t)$:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \pm\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial D}{\partial t} = \pm\frac{1}{\upsilon}\,\upsilon_d \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_d = \pm\upsilon\frac{\partial D}{\partial x} \qquad (2.4)$$

Με την προϋπόθεση ότι το επίπεδο διάμηκες κύμα δεν απορροφάται από το μέσο διάδοσης, η ισχύς ΔP που μεταφέρεται από το κύμα αυτό ανά μονάδα επιφάνειας ΔA, δηλαδή η ένταση του κύματος I, παραμένει σταθερή.

Στα επίπεδα κύματα: $$I = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \text{σταθερό} \qquad (2.5)$$

2.2 Ένταση Σφαιρικών Κυμάτων από Σημειακή Ηχητική Πηγή.

Με τον όρο σημειακή ηχητική πηγή εννοούμε κάθε διάταξη μικρών διαστάσεων σε σχέση με το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος που εκπέμπει. Τέτοιες ηχητικές πηγές είναι το στόμα του ανθρώπου που ομιλεί, όλα τα μουσικά όργανα, τα μεγάφωνα, η μηχανή του αυτοκινήτου όταν αυτή είναι σε λειτουργία κ.λπ.

Στην περίπτωση που η σημειακή ηχητική πηγή είναι ελεύθερη σε ομογενή και ισοτροπικό χώρο και επί πλέον αυτή είναι απαλλαγμένη από ανακλαστικές επιφάνειες, η ολική ηχητική ισχύς P_0 που εκπέμπεται διασκορπίζεται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις, έτσι ώστε σε κάθε απόσταση r από την ηχητική πηγή, η ολική ισχύς P_0 να διέρχεται από την επιφάνεια σφαίρας που έχει ακτίνα r. Στην περίπτωση αυτή, η ένταση I του σφαιρικού κύματος στην απόσταση r θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2} \qquad (2.6)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η σημειακή ηχητική πηγή βρίσκεται πάνω σε επίπεδη ανακλαστική επιφάνεια, όπως για παράδειγμα η μηχανή του αυτοκινήτου η οποία βρίσκεται πρακτικά σε πολύ μικρή απόσταση πάνω από το δρόμο ή ακόμη ένα ηλεκτρικό κουδούνι το οποίο είναι στηριγμένο πάνω σε ένα τοίχο, στην απόσταση r από την ηχητική πηγή η ολική ηχητική ισχύς P_0 που παράγεται από την πηγή διέρχεται μόνο από το ελεύθερο ημισφαίριο ακτίνας r. Στην περίπτωση αυτή η ένταση I του σφαιρικού κύματος στην απόσταση r από την πηγή θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{P_0}{2\pi r^2} \qquad (2.7)$$

2.3 Ένταση Κύματος που Προέρχεται από Γραμμική Ηχητική Πηγή.

Με τον όρο γραμμική ηχητική πηγή εννοούμε κάθε διάταξη η οποία εκτείνεται μόνο σε μια διάσταση και η οποία δύναται να παράγει ήχο. Παραδείγματα τέτοιων ηχητικών διατάξεων είναι οι συρμοί ενός τραίνου που κινούνται κατά μήκος της σιδηροτροχιάς, μια φάλαγγα από αυτοκίνητα κινούνται σε ένα ευθύγραμμο δρόμο ή ακόμη και η ουρά των αυτοκινήτων που είναι σταματημένα σε ένα φανάρι της τροχαίας.

Για να υπολογίσουμε την ένταση του ηχητικού κύματος που προέρχεται από μια γραμμική ηχητική πηγή πρέπει πρώτα να ορίσουμε τη γραμμική πυκνότητα ηχητικής ισχύος λ της πηγής αυτής. Εξ ορισμού λοιπόν, η γραμμική πυκνότητα λ_{sound} είναι ίση με την ισχύ ΔP που εκπέμπεται από τμήμα μήκους ΔL τη ηχητικής πηγής. Συγκεκριμένα:

$$\lambda_{sound} = \frac{\Delta P}{\Delta L} \qquad (2.8)$$

Στην περίπτωση κινούμενου τραίνου, το ΔP είναι η ηχητική ισχύς που παράγεται από ένα βαγόνι και ΔL είναι το μήκος του βαγονιού. Σε μια απόσταση r από το βαγόνι, η ισχύς ΔP θα διαπερνά πρακτικά την επιφάνεια ΔS_r ενός ημικύλινδρου που έχει μήκος ΔL και ακτίνα r. Η επιφάνεια ΔA_r είναι ίση με $\Delta A_r = \pi r \Delta L$:

Οπότε, η ένταση του κύματος που προέρχεται από τη συγκεκριμένη γραμμική ηχητική πηγή σε απόσταση r από αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta A_r} = \frac{1}{\pi r}\frac{\Delta P}{\Delta L} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{\lambda_{sound}}{\pi r} \qquad (2.9)$$

3. ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ (Wave Impedance)

Μια σπουδαία παράμετρος η οποία χαρακτηρίζει το μέσο διάδοσης ενός κύματος είναι η σύνθετη αντίσταση. Η σύνθετη αντίσταση Z εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τις ελαστικές και τις αδρανειακές ιδιότητες του μέσου διάδοσης και ως εκ τούτου είναι ιδιότητα του μέσου διάδοσης και όχι του κύματος. Εξ ορισμού, η σύνθετη αντίσταση Z είναι ίση με το μέτρο του πηλίκου της δύναμης επαναφοράς F_d διά της στιγμιαίας ταχύτητας υ_d ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου διάδοσης:

$$Z = \left|\frac{F_d}{\upsilon_d}\right| \qquad (3.1)$$

3.1 Σύνθετη Αντίσταση Εγκάρσιου Μηχανικού Κύματος σε Τεντωμένο Νήμα.

Στην περίπτωση αυτή, το μέσο διάδοσης είναι ένα νήμα (ή χορδή ή σκοινί) με γραμμική πυκνότητα μάζας μ το οποίο τεντώνεται με δύναμη F, οπότε το κύμα θα διαδίδεται με ταχύτητα:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (3.2)$$

Η δύναμη επαναφοράς F_d των υλικών σημείων του νήματος θα είναι κάθετη στη διεύθυνση του νήματος και θα είναι ίση με την δύναμη F_y που υπολογίστηκε στην παράγραφο 1 (Σχέση 1.4):

$$\left(F_y = F\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1.4)\right)$$

Επίσης, η στιγμιαία ταχύτητα υ_d ταλάντωση των υλικών σημείων του νήματος θα είναι ίση με την ταχύτητα υ_y που υπολογίστηκε στην παράγραφο 1 (Σχέση 1.8):

$$\left(\upsilon_y = \pm\upsilon\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1.8)\right)$$

Οπότε, η Σχέση 3.1, σε συνδυασμό με τις Σχέσεις 1.4 και 1.8, παίρνει τη μορφή:

$$Z = \left|\frac{F_d}{\upsilon_d}\right| = \left|\frac{F_y}{\upsilon_y}\right| = \left|\frac{F\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}}\right| = \left|\frac{F\frac{\partial y}{\partial x}}{(\pm\upsilon)\frac{\partial y}{\partial x}}\right| \qquad \Longrightarrow \qquad Z = \frac{F}{\upsilon} \qquad (3.3)$$

Κάνοντας χρήση και της Σχέσης 3.2, η σύνθετη αντίσταση Z μπορεί να λάβει και τις εξής ισοδύναμες μορφές:

$$Z = \sqrt{\mu F} \qquad \text{ή} \qquad Z = \mu\,\upsilon \qquad (3.4)$$

3.2 Σύνθετη Αντίσταση Διαμήκους Μηχανικού Κύματος.

Στην περίπτωση αυτή, το μέσο διάδοσης είναι μια στήλη αέρα με πυκνότητας μάζας ρ και με συντελεστή ελαστικότητας όγκου B. Κάθε διάμηκες κύμα θα διαδίδεται μέσα στη συγκεκριμένη αέρια στήλη με ταχύτητα:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (3.5)$$

Η σύνθετη αντίσταση του διαμήκους κύματος προκύπτει από το συνδυασμό των Σχέσεων 3.1, 2.3 και 2.4:

$$Z = \left|\frac{F_d}{\upsilon_d}\right| = \left|\frac{-BS\frac{\partial D}{\partial x}}{\pm\upsilon\frac{\partial D}{\partial x}}\right| \qquad \Longrightarrow \qquad Z = \frac{BA}{\upsilon} \qquad (3.6)$$

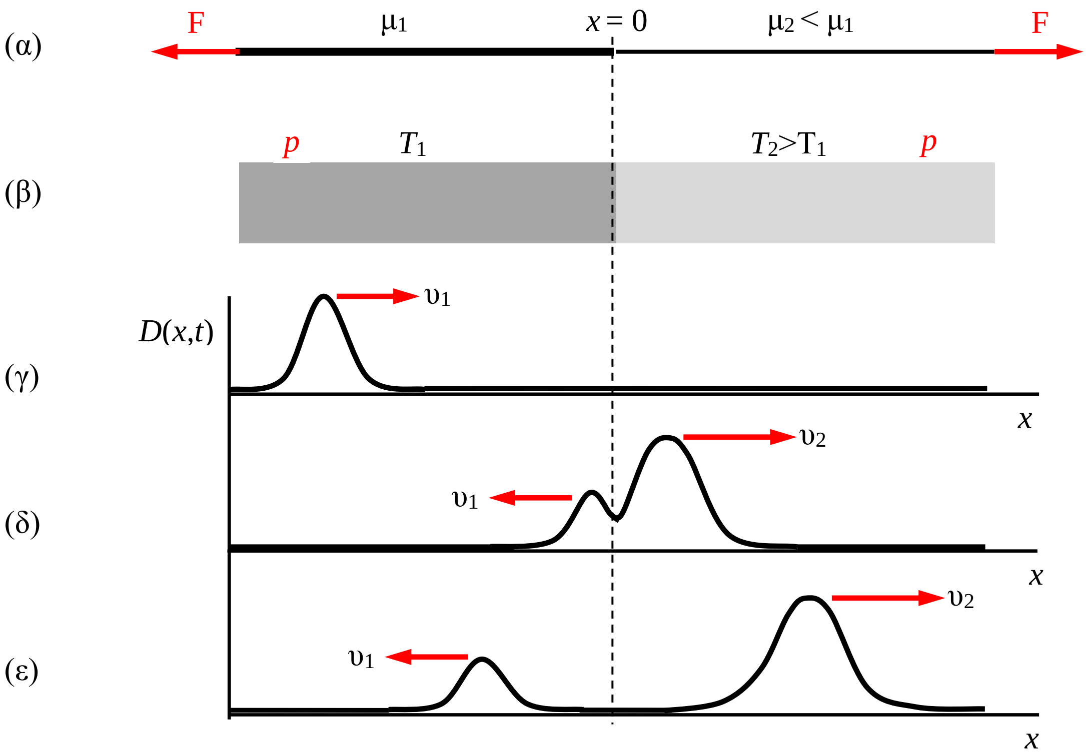
Κάνοντας χρήση και της Σχέσης 3.5, η σύνθετη αντίσταση Z ανά μονάδα επιφανεάις μπορεί να λάβει και τις εξής ισοδύναμες μορφές:

$$\frac{Z}{A} = \sqrt{\rho B} \qquad \text{ή} \qquad \frac{Z}{A} = \rho\,\upsilon \qquad (3.7)$$

4. ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΟΡΙΟ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

4.1 Ανάκλαση – Μετάβαση από ένα μέσο διάδοσης σε άλλο. (Reflection – Transmission).

Με τον όρο σημείο ή επιφάνεια ασυνέχειας του μέσου διάδοσης ενός μηχανικού κύματος εννοούμε κάθε όριο στο οποίο το μέσο διάδοσης αλλάζει τις ελαστικές και τις αδρανειακές του ιδιότητες. Διαπερνώντας το όριο αυτό, η ταχύτητα του κύματος αλλάζει τιμή. Αυτό που θα αποδείξουμε στην παράγραφο αυτή είναι ότι σε κάθε σημείο ή επιφάνεια ασυνέχειας του μέσου διάδοσης ενός μηχανικού κύματος, το κύμα αυτό εν μέρει ανακλάται και εν μέρει μεταβαίνει από το ένα μέσο στο άλλο. Αναλυτικότερα καλούμαστε να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους που περιγράφουν το κύμα που ανακλάται και το κύμα που διαπερνά το όριο ασυνέχειας και μεταβαίνει στο άλλο μέσο διάδοσης.



ΣΧΗΜΑ 4.1

Στο Σχήμα 4.1 αναπαριστούμε τη διάδοση ενός κυματικού παλμού $D(x,t)=f(x-\upsilon t)$ μέσα σε ένα μέσο το οποίο παρουσιάζει ασυνέχεια στη θέση x=0. Το μέσο αυτό μπορεί να αποτελείται από δυο διαφορετικά νήματα με γραμμικές πυκνότητες μάζας μ_1 και μ_2 τα οποία είναι σε σειρά και τα οποία τεντώνονται με δύναμη F (Σχήμα 4.1α) ή θα μπορούσε ακόμη να αποτελείτο από δυο διαδοχικά τμήματα ατμοσφαιρικού αέρα με διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 και T_2 (Σχήμα 4.1β).

Το Σχήμα 4.1γ απεικονίζει ένα αρχικό (**i**nitial) κυματικό παλμό να διαδίδεται στο μέσο 1 προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα υ_1 και περιγράφεται με την κυματοσυνάρτηση:

$$D_i = f_i(x - \upsilon_1 t) \qquad (4.1)$$

Το Σχήμα 4.1δ απεικονίζει ένα στιγμιότυπο του κυματικού παλμού στην περιοχή γύρω από τη θέση x=0 στην οποία βρίσκεται η ασυνέχεια του μέσου διάδοσης.

Το Σχήμα 4.1ε απεικονίζει ένα κυματικό παλμό που ανακλάται στο όριο ασυνέχειας καθώς και ένα κυματικό παλμό που διαπερνά το όριο αυτό. Ο ανακλώμενος (***r**eflected*) κυματικός παλμός επιστρέφει στο μέσο 1, διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα *x* με ταχύτητα υ_1 και περιγράφεται με την κυματοσυνάρτηση:

$$D_r = f_r(x + \upsilon_1 t) \qquad (4.2)$$

Ο κυματικό παλμό που διαπερνά (***t**ransmitted*) το όριο ασυνέχειας μεταβαίνει στο μέσο 2, διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα *x* με ταχύτητα υ_2 και περιγράφεται με την κυματοσυνάρτηση:

$$D_t = f_t(x - \upsilon_2 t) \qquad (4.3)$$

Έχοντας ως δεδομένο το γεγονός ότι στην Κλασική Φυσική όλες οι παράμετροι που περιγράφουν ένα φαινόμενο εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο κατά συνεχή τρόπο, η κυματοσυνάρτηση $D(x,t)$, που περιγράφει τον κυματικό παλμό ακριβώς στο όριο x=0 όπου βρίσκεται η ασυνέχεια του μέσου διάδοσης, πρέπει να είναι συνεχής. Στα μαθηματικά, η συνέχεια μιας συνάρτησης στη θέση x=0 περιγράφεται με τις εξής δυο σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} &D(x=-0,t) = D(x=+0,t) \\ &\left.\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right|_{x=+0} \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

Ο συμβολισμός *x*= – 0 σημαίνει *x*=0 μέσα στο μέσο διάδοσης 1. Στη θέση αυτή συνυπάρχουν ο αρχικός και ο ανακλώμενος κυματικός παλμός, οπότε η στιγμιαία μετατόπιση του κυματικού παλμού στη θέση αυτή θα είναι ίση με το άθροισμα των στιγμιαίων μετατοπίσεων $D_i(x,t)$ και $D_r(x,t)$ του αρχικού παλμού και του ανακλώμενου παλμού, αντίστοιχα:

$$\left.\begin{aligned} &D(x=-0,t) = D_i(0,t) + D_r(0,t) \\ &\left.\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial D_i(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial D_r(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

Ο συμβολισμός *x*= + 0 σημαίνει *x*=0 μέσα στο μέσο διάδοσης 2. Στη θέση αυτή υπάρχει μόνο ο κυματικός παλμός που διαπερνά το όριο ασυνέχειας, οπότε η στιγμιαία μετατόπιση του κυματικού παλμού στη θέση αυτή θα είναι ίση με τη στιγμιαία μετατόπιση $D_t(x,t)$ του παλμού που διαδίδεται στο μέσο διάδοσης 2. Οπότε:

$$\left.\begin{aligned} &D(x=+0,t) = D_t(0,t) \\ &\left.\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right|_{x=+0} = \left.\frac{\partial D_t(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

Σύμφωνα με τις Σχέσεις 4.4, τα πρώτα μέλη των αντίστοιχων εξισώσεων στις Σχέσεις 4.5 και 4.6 είναι ίσα, οπότε, αφού λάβουμε υπόψη μας και τη Σχέση 2.4, θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &D_i(0,t) + D_r(0,t) = D_t(0,t) \\ &\left.\frac{\partial D_i(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial D_r(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial D_t(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &D_i(0,t) + D_r(0,t) = D_t(0,t) \\ &-\frac{1}{\upsilon_1}\frac{\partial D_i(0,t)}{\partial t} + \frac{1}{\upsilon_1}\frac{\partial D_r(0,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\upsilon_2}\frac{\partial D_t(0,t)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &D_i(0,t) + D_r(0,t) = D_t(0,t) \\ &\frac{\partial}{\partial t}\big(D_i(0,t) - D_r(0,t)\big) = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\frac{\partial D_t(0,t)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &D_i + D_r = D_t \\ &D_i - D_r = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} D_t \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Αν είναι γνωστή η τιμή της στιγμιαίας μετατόπισης D_i του κυματικού παλμού, το σύστημα των δυο εξισώσεων των Σχέσεων 4.7 προσδιορίζει τις στιγμιαίες μετατοπίσεις D_r και D_t του ανακλώμενου κυματικού παλμού και του παλμού που διαπερνά το όριο ασυνέχειας και διαδίδεται στο μέσο 2: Συγκεκριμένα:

$$D_r = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2} D_i \qquad \text{και} \qquad D_t = \frac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} D_i \qquad (4.8)$$

Από τις Σχέσεις 4.8 προκύπτουν και οι συντελεστές μετάβασης *t* (διαπερατότητα ή transmission coefficient) και ανάκλασης *r* (ανακλαστικότητα ή reflection coefficient) στο όριο της ασυνέχειας:

$$r = \frac{D_r}{D_i} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2} \qquad \text{και} \qquad t = \frac{D_t}{D_i} = \frac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} \qquad (4.9)$$

Στην περίπτωση που το κύμα είναι ημιτονοειδές, χρησιμοποιούμε την κυματική σχέση:

$$\upsilon = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

οπότε οι Σχέσεις 4.9 μπορούν να γραφούν και με τις εξής μορφές:

$$\textit{Ανακλαστικότητα}:\ r = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad (4.10\alpha)$$

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \qquad (4.10\beta)$$

$$\textit{Διαπερατότητα}:\ t = \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad (4.11\alpha)$$

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \qquad (4.11\beta)$$

Τέλος, από τις Σχέσεις 4.9 προκύπτει εύκολα και η παρακάτω σχέση μεταξύ συντελεστών ανακλαστικότητα και διαπερατότητας:

$$t = r + 1 \qquad (4.12)$$

4.2 Ανακλαστικότητα – Διαπερατότητα Σημείου Ασυνέχειας σε Τεντωμένο Νήμα.

Το μέσο διάδοσης αποτελείται από δυο νήματα τα οποία έχουν γραμμικούς συντελεστές μάζας μ_1 και μ_2, είναι δεμένα σε σειρά και τεντώνονται με δύναμη F. Στην περίπτωση αυτή, οι Σχέσεις 4.9 σε συνδυασμό με τις Σχέσεις 3.2 και 3.4 δίνουν:

$$\text{Ανακλαστικότητα:}\ \ r = \frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}} \qquad (4.13\alpha)$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1 F}-\sqrt{\mu_2 F}}{\sqrt{\mu_1 F}+\sqrt{\mu_2 F}} \quad \text{ή} \quad r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (4.13\beta)$$

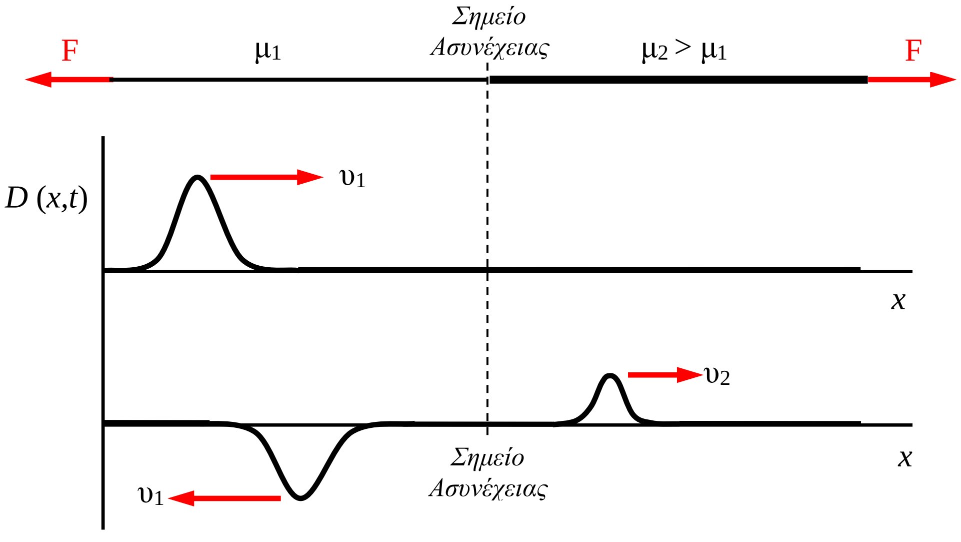
$$\text{Διαπερατότητα:}\ \ t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}} \qquad (4.14\alpha)$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_1 F}}{\sqrt{\mu_1 F}+\sqrt{\mu_2 F}} \quad \text{ή} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad (4.14\beta)$$

4.3 Διερεύνηση των Σχέσεων 4.13 και 4.14

Περίπτωση $\mu_1>\mu_2$: Μετάβαση από βαρύ σε ελαφρύ νήμα. Τότε $Z_1>Z_2$ (βλέπε Σχήμα 4.1α). Από τις Σχέσεις 4.13 και 4.14 προκύπτει ότι $t>0$ και $r>0$. Αυτό σημαίνει ότι ο κυματικός παλμός που ανακλάται και ο κυματικός παλμός που διαπερνά το όριο ασυνέχειας θα έχουν την ίδια φάση με τον αρχικό κυματικό παλμό.

Περίπτωση $\mu_1<\mu_2$: Μετάβαση από ελαφρύ σε βαρύ νήμα. Τότε $Z_1<Z_2$. Από τις Σχέσεις 4.13 και 4.14 προκύπτει ότι $t>0$ και $r<0$. Αυτό σημαίνει ότι ο κυματικός παλμός που ανακλάται θα είναι αντεστραμμένος, θα έχει δηλαδή διαφορά φάσης π=3,14 rad σε σχέση με τον αρχικό κυματικό παλμό. Αντίθετα, ο κυματικός παλμός που διαπερνά το όριο ασυνέχειας θα έχει την ίδια φάση με τον αρχικό κυματικό παλμό (βλέπε Σχήμα 4.2).



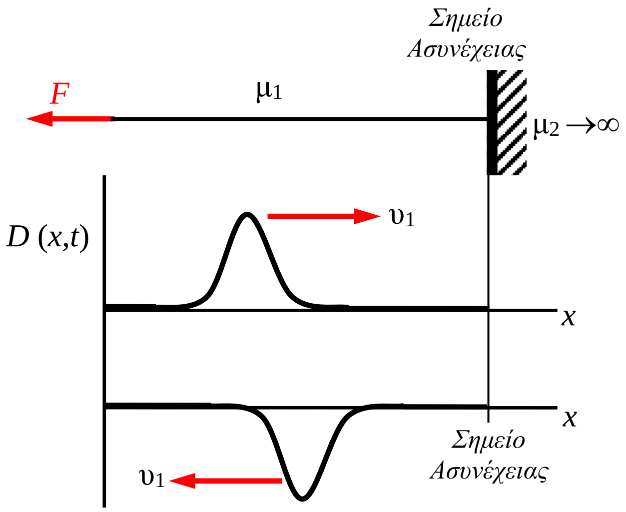
ΣΧΗΜΑ 4.2

Περίπτωση μ$_2$→∞: Το νήμα με γραμμική πυκνότητα μ$_1$ είναι δεμένο σε σταθερό ακλόνητο σημείο (τοίχος). Τότε Z$_2$→∞ ή ισοδύναμα $\frac{Z_1}{Z_2} \longrightarrow 0$. Από τη Σχέση 4.14β παίρνουμε:

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{Z_1}{Z_2} - 1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1} \quad \Longrightarrow \quad r = -1$$

Και από τη Σχέση 4.12 παίρνουμε ότι: $t = 0$.

Στην περίπτωση αυτή, ο κυματικός παλμός δεν διαπερνά το όριο ασυνέχειας και υφίσταται τέλεια ανάκλαση με τον ανακλώμενο κυματικό παλμό να έχει διαφορά φάσης π=3,14 rad (αντεστραμμένος) σε σχέση με τον αρχικό κυματικό παλμό (βλέπε Σχήμα 4.3).



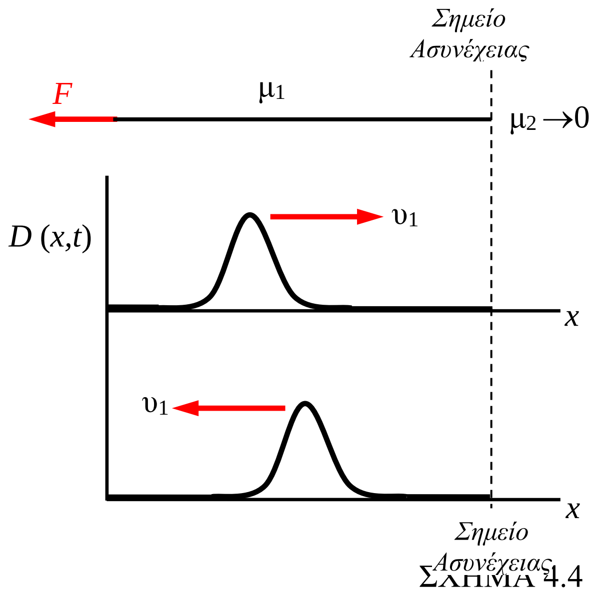
ΣΧΗΜΑ 4.3

Περίπτωση μ$_2$→0: Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει δεύτερο νήμα και το δεξιό άκρο του πρώτου νήματος είναι ελεύθερο. Τότε $\frac{Z_1}{Z_2} \longrightarrow \infty$ ή ισοδύναμα $\frac{Z_2}{Z_1} \longrightarrow 0$. Από τη Σχέση 4.13β παίρνουμε:

$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \quad \Longrightarrow \quad t = 2$$

Και από τη Σχέση 4.12 παίρνουμε: $r = 1$

Επειδή $r = 1$, ο κυματικός παλμός υφίσταται τέλεια ανάκλαση στο δεξιό ελεύθερο άκρο του νήματος και επειδή r>0 ο ανακλώμενος παλμό θα έχει την ίδια φάση με τον αρχικό κυματικό παλμό (βλέπε Σχήμα 4.4).



ΣΧΗΜΑ 4.4

4.4 Ανακλαστικότητα – Διαπερατότητα Ορίου Ασυνέχειας σε Μέσο Διάδοσης Επίπεδου Διαμήκους Κύματος.

Το μέσο διάδοσης είναι δυο διαδοχικές περιοχές του ατμοσφαιρικός αέρας με διαφορετικές Θερμοκρασίες T_1 και T_2, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε μια παραθαλάσσια περιοχή. Τις καλοκαιρινές νυχτερινές ώρες η θερμοκρασία του αέρα T_1 που είναι πάνω από τη θάλασσα είναι μικρότερη από τη θερμοκρασία T_2 του αέρα που είναι πάνω από την ξηρά. Στην περίπτωση αυτή και για ένα επίπεδο διάμηκες κύμα που διαδίδεται από τον αέρα της θάλασσας προς τον αέρα της ξηράς (ή και αντίθετα), οι Σχέσεις 4.9 σε συνδυασμό με τη σχέση:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

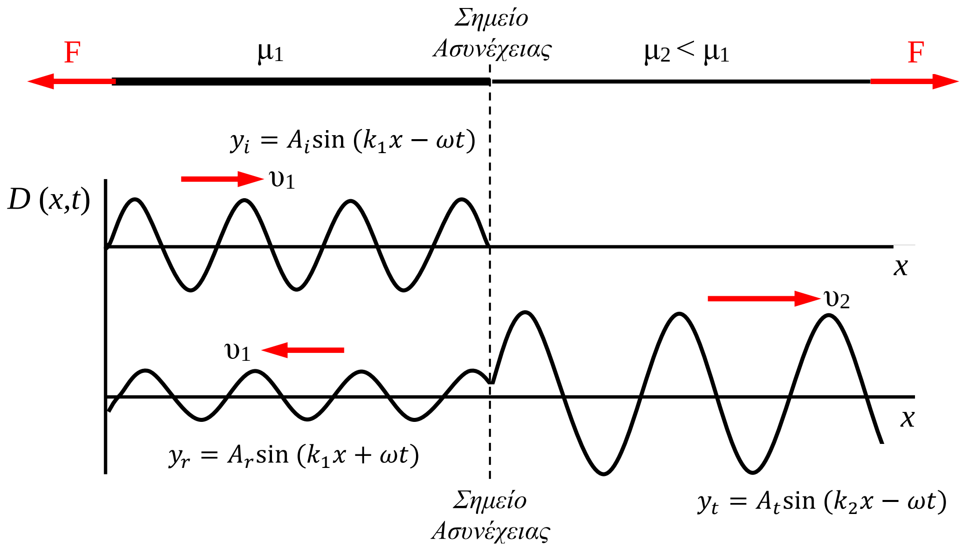
που δίνει την ταχύτητα του διαμήκους κύματος συναρτήσει της θερμοκρασίας, δίνουν τελικά:

$$Ανακλαστικότητα:\ \ r = \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} \qquad (4.15)$$

$$Διαπερατότητα:\ \ t = \frac{2\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} \qquad (4.16)$$

4.5 Ανακλαστικότητα – Διαπερατότητα Ορίου Ασυνέχειας Μέσου Διάδοση και Ισχύς Αρμονικού Κύματος.

Το Σχήμα 4.5 δείχνει ένα τεντωμένο νήμα το οποίο είναι παράλληλο με τον άξονα x και στο οποίο υπάρχει σημείο ασυνέχειας που διαχωρίζει το νήμα σε δυο περιοχές με γραμμικές πυκνότητες μάζας μ_1 και μ_2.



ΣΧΗΜΑ 4.5

Θεωρούμε εγκάρσιο μηχανικό αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση +x κατά μήκος του νήματος που έχει γραμμική πυκνότητα μ_1 και το οποίο περιγράφεται με την εξίσωση κύματος:

$$y_i = A_i \sin(k_1 x - \omega t) \qquad (4.17)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα και $k_i = \omega/\upsilon_1$ είναι ο κυματαριθμός του κύματος Στο σημείο ασυνέχειας του νήματος, το κύμα εν μέρει ανακλάται και εν μέρει διαπερνά το σημείο αυτό. Αν A_r και A_t είναι τα πλάτη του κύματος που ανακλάται στο όριο ασυνέχειας και επιστρέφει στο νήμα με γραμμική πυκνότητα μ_1 και του κύματος που διαπερνά το όριο ασυνέχειας και διαδίδεται στο νήμα με γραμμική πυκνότητα μ_2, αντίστοιχα, τότε οι εξισώσεις κύματος των δυο αυτών κυμάτων θα είναι:

$$y_r = A_r \sin(k_1 x + \omega t) \qquad (4.18)$$

$$y_t = A_i \sin(k_2 x - \omega t) \qquad (4.19)$$

Η μέση ισχύς $P_{i,avg}$, $P_{r,avg}$ και $P_{t,avg}$ του κάθε ενός από τα τρία κύματα που περιγράφονται με τις Σχέσεις 4.17, 4.18 και 4.19 θα είναι αντίστοιχα:

$$P_{i,avg} = \frac{1}{2}\mu_1 \upsilon_1 \omega^2 A_i^2 \qquad P_{r,avg} = \frac{1}{2}\mu_1 \upsilon_1 \omega^2 A_r^2 \qquad P_{t,avg} = \frac{1}{2}\mu_2 \upsilon_2 \omega^2 A_t^2$$

Οπότε, οι συντελεστές ανακλαστικότητας R και διαπερατότητας T ισχύος θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$Ανακλαστικότητα\ \ Ισχύος:\ R = \frac{P_{r,avg}}{P_{i,avg}} = \frac{\frac{1}{2}\mu_1 \upsilon_1 \omega^2 A_r^2}{\frac{1}{2}\mu_1 \upsilon_1 \omega^2 A_i^2} \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$$

Και από την πρώτη των Σχέσεων 4.9 παίρνουμε:

$$R = \left(\frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2}\right)^2 \qquad (4.20)$$

$$\textit{Διαπερατότητα Ισχύος}: \quad T = \frac{P_{t,avg}}{P_{i,avg}} = \frac{\frac{1}{2}\mu_2\upsilon_2\omega^2 A_t^2}{\frac{1}{2}\mu_1\upsilon_1\omega^2 A_i^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\mu_2\upsilon_2 A_t^2}{\mu_1\upsilon_1 A_i^2} = \frac{\mu_2\upsilon_2}{\mu_1\upsilon_1}\left(\frac{A_t}{A_i}\right)^2$$

Από τη Σχέση 3.2 προκύπτει ότι $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2}$. Οπότε, αν λάβουμε υπόψη μας και τη δεύτερη από τις Σχέσεις 4.9, η διαπερατότητα ισχύος Τ θα είναι ίση με:

$$T = \frac{\mu_2\upsilon_2}{\mu_1\upsilon_1}\left(\frac{A_t}{A_i}\right)^2 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\left(\frac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{4\upsilon_1\upsilon_2}{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2} \qquad (4.21)$$

Ως εργασία για το σπίτι:

(α) Να εκφράσετε τις παραμέτρους *R* και *T* συναρτήσει:
- (α1) Των μηκών κύματος λ_1 και λ_2 του ανακλώμενου αρμονικού κύματος και του αρμονικού κύματος που διαπερνά το όριο ασυνέχειας.
- (α2) Των κυματαριθμών k_1 και k_2 του ανακλώμενου αρμονικού κύματος και του αρμονικού κύματος που διαπερνά το όριο ασυνέχειας.
- (α3) Των γραμμικών πυκνοτήτων μάζας μ_1 και μ_2 των δυο νημάτων.
- (α4) Των σύνθετων αντιστάσεων Z_1 και Z_2 των αρμονικών κυμάτων που διαδίδονται στα νήματα με γραμμικές πυκνότητες μ_1 και μ_2, αντίστοιχα.

(β) Να αποδείξετε ότι: $R + T = 1$

(γ) Να αποδείξετε ότι: $P_{r,avg} + P_{t,avg} = P_{i,avg}$