ΑΝΩΤΑΤΗ
ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ	ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ
ΦΥΣΙΚΗ	**Μηχανολόγων Μηχανικών**
	Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Καθηγητής Σιδερής Ευστάθιος

ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ
ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΕΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

Συνθήκες Κύματος σε Ασυνέχεια του Μέσου Διάδοσης

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

Μια σημαντική εξίσωση στη μελέτη όλων των κυμάτων

Γενική μορφή της κυματικής εξίσωσης: $D(x,t) = f(x \pm vt)$

Μερική 1η χωρική παράγωγος κυματικής εξίσωσης: $\boxed{\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial x} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial (x \pm vt)} \frac{\partial (x \pm vt)}{\partial x} = \frac{f(x \pm vt)}{\partial (x \pm vt)}$

Μερική 1η χρονική παράγωγος κυματικής εξίσωσης: $\frac{\partial D(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial t} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial (x \pm vt)} \frac{\partial (x \pm vt)}{\partial t} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial (x \pm vt)} (\pm v)$

$$\boxed{\frac{1}{\pm v} \frac{\partial D(x,t)}{\partial t}} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial (x \pm vt)}$$

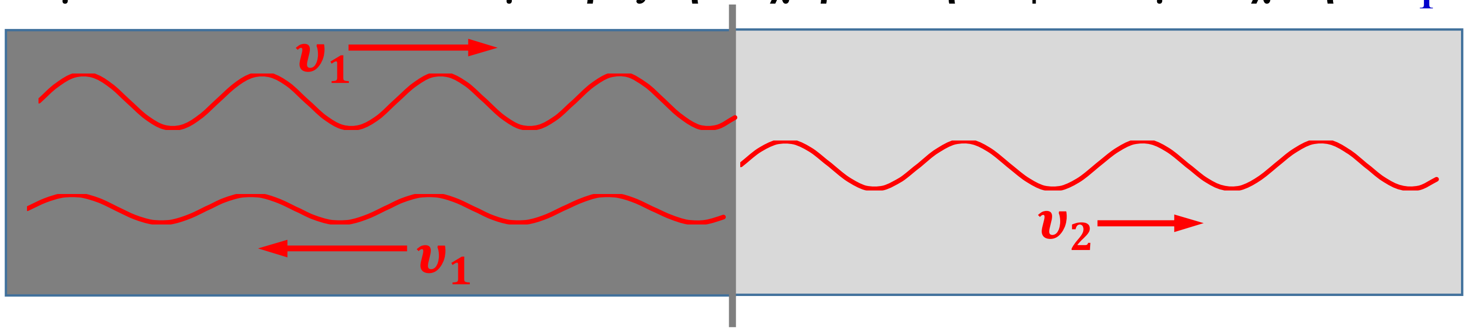
$$\boxed{\frac{\partial D(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\pm v} \frac{\partial D(x,t)}{\partial t}}$$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

Αποδείξαμε: $$\boxed{\frac{\partial D(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{\pm\upsilon}\frac{\partial D(r,t)}{\partial t}}$$

Δυο διαφορετικά μέσα διάδοσης κύματος έχουν τη διαχωριστική τους επιφάνεια στη θέση $x = 0$

Στο μέσο 1 διαδίδεται ένα κύμα προς τη διαχωριστική επιφάνεια με ταχύτητα υ_1



Το κύμα ανακλάται στο ίδιο μέσο με ταχύτητα υ_1 $x = 0$ **Το κύμα εισέρχεται στο άλλο μέσο με ταχύτητα** υ_2

Στη διαχωριστική επιφάνεια

Εξίσωση κύματος του κύματος που προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια: $D_i(x,t) = f_i(x - \upsilon_1 t)$

Εξίσωση κύματος του κύματος που ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια: $D_r(x,t) = f_r(x + \upsilon_1 t)$

Εξίσωση κύματος του κύματος που διαπερνά τη διαχωριστική επιφάνεια: $D_t(x,t) = f_t(x - \upsilon_2 t)$

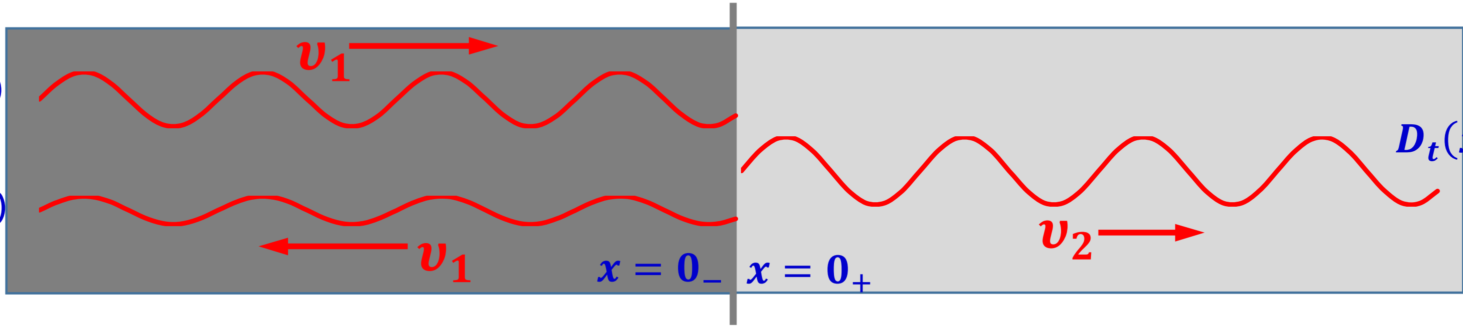
ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

$$\boxed{\frac{\partial D(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{\pm v}\frac{\partial D(r,t)}{\partial t}}$$

$$\boxed{D_i + D_r = D_t}$$

$D_i(x,t) = f_i(x - v_1 t)$

$D_r(x,t) = f_x(x + v_1 t)$



$D_t(x,t) = f_t(x - v_2 t)$

$x = 0$

Στη θέση $x = 0-$ συνυπάρχουν τα κύματα: $D_i(x,t)$ και $D_r(x,t)$

Στη θέση $x = 0+$ υπάρχει μόνο το κύμα: $D_t(x,t)$

Συνολική μετατόπιση: $D(x = 0-, t) = D_i(0,t) + D_r(0,t)$

Συνολική μετατόπιση: $D(x = 0+, t) = D_t(0,t)$

Η κυματοσυνάρτηση $D(x,t)$ πρέπει να είναι συνεχής στη θέση $x = 0$:

Συνθήκες Συνέχειας:

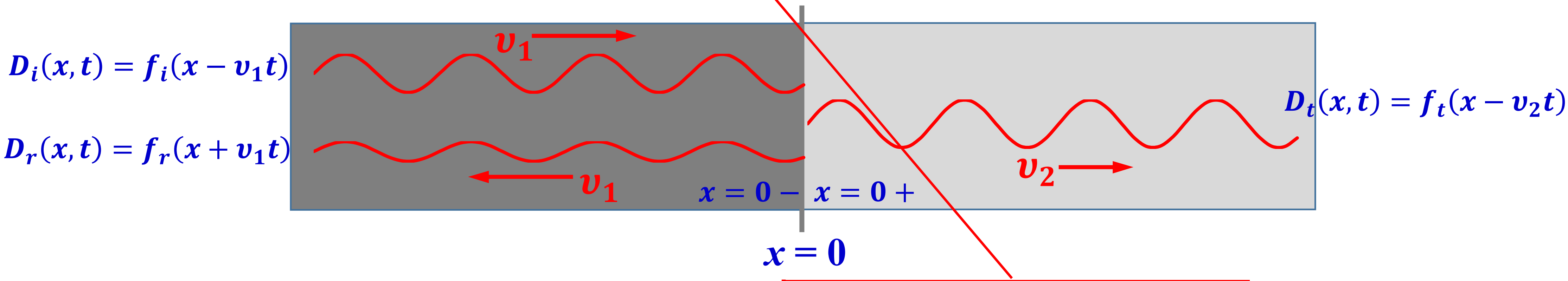
$$\begin{cases} D(x = 0-, t) = D(x = 0+, t) \;\Rightarrow\; D_i\,(0,t) + D_r\,(0,t) = D_t(0,t) \;\Rightarrow\; \boxed{D_i + D_r = D_t} \\[2ex] \left[\dfrac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0-} = \left[\dfrac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0+} \;\Rightarrow\; \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_i(x,t) + D_r\,(x,t)\right)\right]_{x=0-} = \left[\dfrac{\partial D_t(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0+} \;\Rightarrow \end{cases}$$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

$$\boxed{\frac{\partial D(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\pm v}\frac{\partial D(x,t)}{\partial t}}$$

$$\boxed{D_i + D_r = D_t}$$

$$\boxed{D_i - D_r = \frac{v_1}{v_2} D_t}$$



$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(D_i(x,t) + D_r(x,t)\big)\right]_{x=0-} = \left[\frac{\partial D_t(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0+} \Rightarrow \left[\frac{\partial D_i(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0-} + \left[\frac{\partial D_r(x,t)}{\partial r}\right]_{x=0-} = \left[\frac{\partial D_t(r,t)}{\partial r}\right]_{x=0+} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{-v_1}\frac{\partial D_i(0,t)}{\partial t} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial D_r(0,t)}{\partial t} = \frac{1}{-v_2}\frac{\partial D_t(0,t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial D_i(0,t)}{\partial t} - \frac{\partial D_r(0,t)}{\partial t} = \frac{v_1}{v_2}\frac{\partial D_t(0,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\big(D_i(0,t) - D_r(0,t)\big) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_1}{v_2} D_t(0,t)\right) \Rightarrow \boxed{D_i(0,t) - D_r(0,t) = \frac{v_1}{v_2} D_t(0,t)}$$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

Κατά τη διάδοση ενός κύματος από ένα μέσο σε ένα άλλο μέσο, αυτό που είναι γνωστό είναι η μετατόπιση D_{i} του κύματος που προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια των δυο μέσων διάδοσης

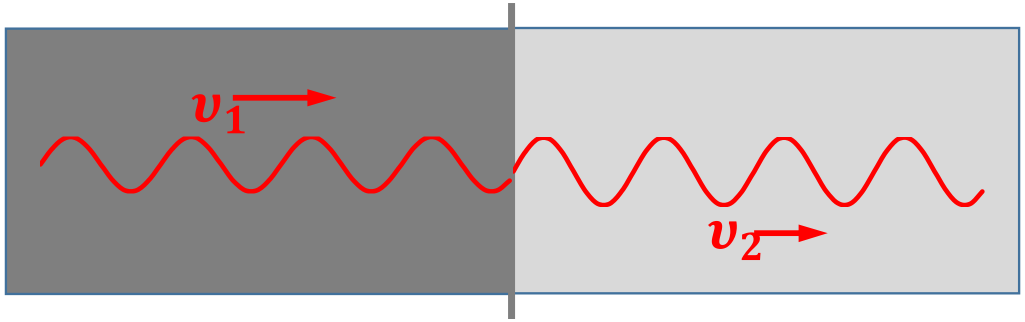
Τα ζητούμενα είναι οι μετατοπίσεις:
- D_r **του κύματος που ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια**
- D_t **του κύματος που διέρχεται τη διαχωριστική επιφάνεια**

$$\left.\begin{array}{l} D_i + D_r = D_t \\[2ex] D_i - D_r = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} D_t \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{δυο εξισωσεις}]{\text{προσθετουμε τις}} (D_i + D_r) + (D_i - D_r) = D_t + \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} D_t \Rightarrow 2D_i = \left(1 + \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right) D_t \Rightarrow$$

$$D_t = \frac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} D_i \Rightarrow \text{Διαπερατότητα Κύματος: } t = \frac{D_t}{D_i} \Rightarrow \boxed{t = \frac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}}$$

Ισχύει πάντα: $t > 0 \Rightarrow D_i$ **και** D_t **είναι ομόσημα**

Αυτό σημαίνει ότι το προσπίπτον κύμα και το διερχόμενο κύμα είναι συμφασικά



ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

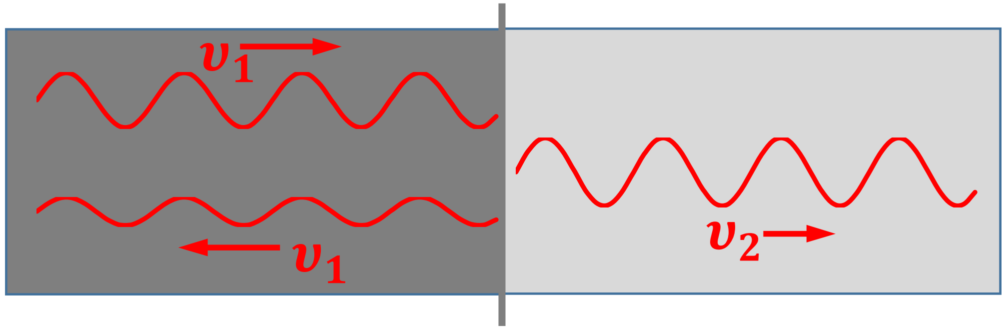
Αποδείξαμε: $\left\{ \begin{array}{l} D_t = \dfrac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} D_i \\ \\ D_i + D_r = D_t \end{array} \right\} \; D_i + D_r = \dfrac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} D_i \;\Rightarrow\; D_r = \dfrac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} D_i - D_i \;\Rightarrow\; D_r = \left(\dfrac{2\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} - 1 \right) D_i \Rightarrow$

$$D_r = \left(\frac{2\upsilon_2 - (\upsilon_1 + \upsilon_2)}{\upsilon_1 + \upsilon_2} \right) D_i \;\Rightarrow\; D_r = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2} D_i \;\Rightarrow$$

Ανακλαστικότητα: $r = \dfrac{D_r}{D_i} \;\Rightarrow\; \boxed{r = \dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2}}$

$\upsilon_2 > \upsilon_1 \;\Rightarrow\; r > 0 \;\Rightarrow\; D_i$ **και** D_r **είναι ομόσημα**

Αυτό σημαίνει ότι το προσπίπτον κύμα και το ανακλόμενο κύμα είναι συμφασικά



$\upsilon_2 < \upsilon_1 \;\Rightarrow\; r < 0 \;\Rightarrow\; D_i$ **και** D_r **είναι ετερόσημα**

Αυτό σημαίνει ότι το προσπίπτον κύμα και το διερχόμενο κύμα έχουν διαφορά φάσης π rad