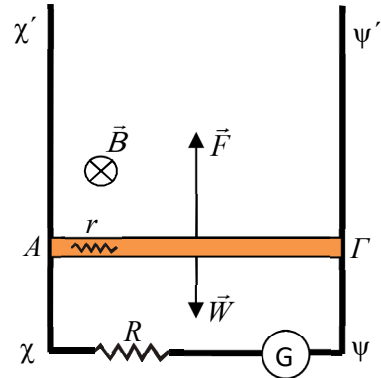


Επιταχύνοντας έναν αγωγό σε μαγνητικό πεδίο

Στο κύκλωμα του σχήματος η ράβδος ΑΓ με μήκος $l = 1m$, μάζα $m = 0,4kg$ και αντίσταση $r = 1\Omega$, μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε επαφή με τους δυο κατακόρυφους (χωρίς αντίσταση) αγωγούς $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$. Στο χώρο υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 2T$, με φορά όπως στο σχήμα. Η αντίσταση του αγωγού $\chi\psi$ είναι $R = 4\Omega$, ενώ $g = 10m/s^2$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκούμε στη ράβδο εξωτερική δύναμη μέτρου $F > W$, κάθετα στη ράβδο, με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα πάνω. Η διαφορά δυναμικού V_{AG} αυξάνεται διαρκώς και κάποια στιγμή σταθεροποιείται στην τιμή $V_{AG} = 8V$.

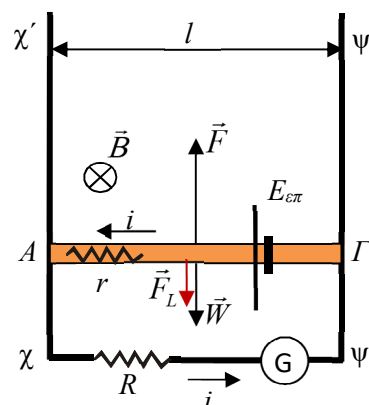


- α) Να μελετήσετε ποιοτικά την κίνηση της ράβδου.
- β) Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος.
- γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F .
- δ) Να βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης – ταχύτητας, κατά τη διάρκεια κίνησης της ράβδου, και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες, μέχρι να αποκτήσει οριακή ταχύτητα ο αγωγός.
- ε) Αν το βαλλιστικό γαλβανόμετρο G δείξει τη διέλευση ηλεκτρικού φορτίου $q_{επ} = 4C$, μέχρι τη στιγμή που ο αγωγός αποκτά οριακή ταχύτητα,
 - ε₁) Πόσο διάστημα θα έχει διανύσει ο αγωγός εκείνη τη στιγμή και
 - ε₂) Σε πόσο χρόνο αποκτά ο αγωγός την οριακή του ταχύτητα;
- στ) Κάποια στιγμή που η ταχύτητα του αγωγού έχει μέτρο $v = 4m/s$ υπολογίστε:
 - στ₁) το ρυθμό παραγωγής έργου της δύναμης F .
 - στ₂) το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.
 - στ₃) το ρυθμό παραγωγής θερμικής ενέργειας λόγω φαινομένου Joule.
 - στ₄) το ρυθμό παραγωγής έργου της δύναμης Laplace.
 - στ₅) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού.

Απάντηση

α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$, $F > W$ και η ράβδος επιταχύνεται, ανέρχεται, η ταχύτητα αυξάνεται και λίγο μετά, μια τυχαία χρονική στιγμή t , αναπτύσσεται ΗΕΔ επαγωγής στη ράβδο,

$E_{επ} = Blv$ με πολικότητα, που προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως στο σχήμα, η οποία ρευματοδοτεί το κύκλωμα με επαγωγικό ρεύμα έντασης



$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R+r} \Leftrightarrow i = \frac{Bvl}{R+r} \quad (1)$$

Τότε ασκείται δύναμη Laplace στον αγωγό, μέτρου

$$F_L = Bil \xrightarrow{(1)} F_L = \frac{B^2 l^2}{R+r} v \quad (2)$$

η οποία έχει τη φορά του σχήματος (αντιστέκεται στην κίνηση).

Εφαρμόζουμε το 2ο Νόμο του Newton για τον αγωγό:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} = m\vec{a} &\Leftrightarrow F - W - F_L = ma \xrightarrow{(2)} F - mg - \frac{B^2 l^2}{R+r} v = ma \\ \Leftrightarrow a &= \frac{F - mg - \frac{B^2 l^2}{R+r} v}{m} \Leftrightarrow a = \frac{(F - mg)(R+r) - B^2 l^2 v}{m(R+r)} \quad (3) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όσο η ταχύτητα αυξάνεται, η επιτάχυνση μειώνεται και κάποια στιγμή μηδενίζεται. Τότε ο αγωγός αποκτά σταθερή (οριακή) ταχύτητα, οπότε σταθεροποιείται η ΗΕΔ επαγωγής, η ένταση του επαγωγικού ρεύματος και η τάση στα άκρα του αγωγού.

β) Ο αγωγός συμπεριφέρεται ως γεννήτρια με ΗΕΔ $E_{\varepsilon\pi}$ και εσωτερική αντίσταση r , που τροφοδοτεί κύκλωμα αντίστασης R . Η τάση στα άκρα του αγωγού ΑΓ, όταν αυτός αποκτήσει οριακή ταχύτητα, προκύπτει από το νόμο Ohm σε κλειστό κύκλωμα:

$$\begin{aligned} V_{AG} = E_{\varepsilon\pi} - i_{op} r &\Leftrightarrow V_{AG} = Bv_{op} l - \frac{Bv_{op} l}{R+r} r \Leftrightarrow V_{AG} = Bv_{op} l \left(1 - \frac{r}{R+r}\right) \\ \Leftrightarrow 8 &= 2v_{op} \left(1 - \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow 4 = 0,8v_{op} \Leftrightarrow v_{op} = 5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

γ) Η εξίσωση (3) για $a = 0$ δίνει

$$\begin{aligned} \frac{(F - mg)(R+r) - B^2 l^2 v_{op}}{m(R+r)} &= 0 \Leftrightarrow (F - mg)(R+r) - B^2 l^2 v_{op} = 0 \\ \Leftrightarrow v_{op} &= \frac{(F - mg)(R+r)}{B^2 l^2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$v_{op} = \frac{(F - mg)(R+r)}{B^2 l^2} \Leftrightarrow 5 = \frac{(F - 4)5}{4} \Leftrightarrow F = 8 \text{ N}$$

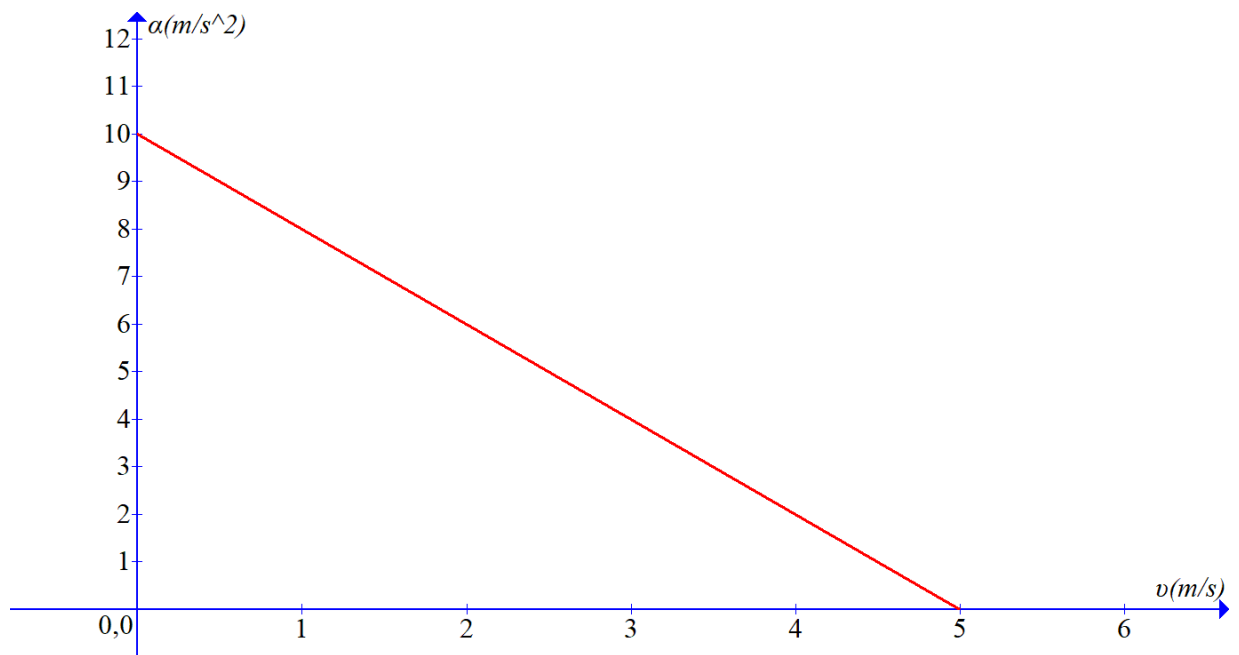
δ) Η εξίσωση (3) δίνει

$$\begin{aligned} a &= \frac{(F - mg)(R+r) - B^2 l^2 v}{m(R+r)} \Leftrightarrow a = \frac{(8 - 4) \cdot 5 - 4 \cdot v}{0,4 \cdot 5} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{20 - 4v}{2} \Leftrightarrow a = 10 - 2v \quad (S.I.) \end{aligned}$$

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t = 0, v = 0 \text{ και } a = \frac{F - mg}{m} = \frac{8 - 4}{0,4} = 10 \text{ m/s}^2$$

Όταν $v = v_{op} = 4 \text{ m/s}$, $a = 0$.

Η γραφική παράσταση θα είναι:



ε) ε₁) Ο νόμος Newmann δίνει για το επαγωγικό φορτίο

$$q_{επ} = \frac{\Delta\Phi}{R+r} \Leftrightarrow q_{επ} = \frac{B \cdot \Delta S}{R+r}$$

$$\Leftrightarrow q_{επ} = \frac{B \cdot l \cdot d}{R+r} \Leftrightarrow d = \frac{q_{επ}(R+r)}{Bl}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{4 \cdot 5}{2} \Leftrightarrow d = 10m$$

β' τρόπος

Σε ένα στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του κυκλώματος είναι

$$dq_{επ} = i \cdot dt \xrightarrow{(1)} dq_{επ} = \frac{Bvl}{R+r} \cdot dt$$

Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που μετατοπίζεται στο κύκλωμα, βρίσκεται αν αθροίσουμε τα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία που πέρασαν σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του αγωγού, άρα

$$q_{επ} = \sum dq_{επ} \Leftrightarrow q_{επ} = \sum \frac{Bvl}{R+r} \cdot dt \Leftrightarrow q_{επ} = \frac{Bl}{R+r} \sum v \cdot dt$$

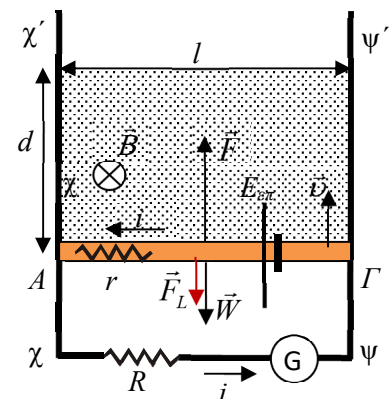
$$\Leftrightarrow q_{επ} = \frac{Bl}{R+r} \sum dx \Leftrightarrow q_{επ} = \frac{Bl}{R+r} \cdot d \Leftrightarrow d = \frac{q_{επ}(R+r)}{Bl} \Leftrightarrow d = 10m$$

ε₂) Για την εύρεση του χρόνου κίνησης του αγωγού θα χρησιμοποιήσουμε τη γενικευμένη έκφραση του 2^{ου} Νόμου Newton.

Η μεταβολή της ορμής που υφίσταται ο αγωγός σε στοιχειώδες χρονικό διάστημα είναι

$$dp = \Sigma F \cdot dt \Leftrightarrow dp = (F - W - F_L) \cdot dt \Leftrightarrow dp = (F - W - Bil) \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow dp = (F - W) \cdot dt - Bli \cdot dt \Leftrightarrow dp = (F - W) \cdot dt - Bl \cdot dq \quad (4)$$



Η μεταβολή της ορμής του αγωγού στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0 = t$, που χρειάστηκε μέχρι να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα βρίσκεται αν αθροίσουμε τις στοιχειώδεις μεταβολές που δίνει η εξίσωση (4):

$$\begin{aligned} \Delta p &= \sum dp \Leftrightarrow p_{op} - p_0 = \sum [(F - W) \cdot dt - Bl \cdot dq] \\ \Leftrightarrow p_{op} - 0 &= \sum (F - W) \cdot dt - \sum Bl \cdot dq \Leftrightarrow p_{op} = (F - W) \sum dt - Bl \sum dq \\ \Leftrightarrow mv_{op} &= (F - mg)t - Blq_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow 0,4 \cdot 5 = (8 - 4)t - 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 4t = 2 + 8 \Leftrightarrow t = 2,5s \end{aligned}$$

$$\text{στ}_1) \frac{dw_F}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \cdot \frac{dx}{dt} = F \cdot v = 8 \cdot 4 = 32 \frac{J}{s}$$

$$\text{στ}_2) \frac{dU_\beta}{dt} = -\frac{dW}{dt} = -\frac{mg \cdot dx \cdot \sin 180}{dt} = +mg \cdot v = +0,4 \cdot 10 \cdot 4 = +16 \frac{J}{s}$$

στ₃) Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος έχει εκείνη τη στιγμή τιμή

$$i = \frac{Bvl}{R + r} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{5} = 1,6 A$$

$$\frac{dQ}{dt} = P_{\theta(Ro\lambda)} = i^2 \cdot R_{o\lambda} = 1,6^2 \cdot 5 = 12,8 \frac{J}{s}$$

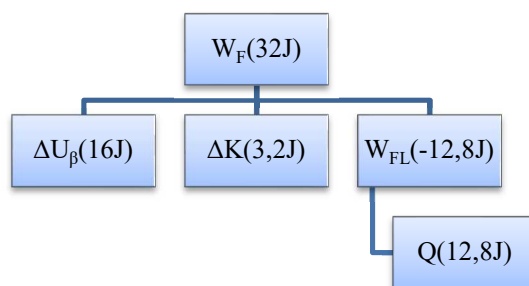
στ₄) Η δύναμη Laplace έχει μέτρο $F_L = Bil = 2 \cdot 1,6 \cdot 1 = 3,2 N$.

$$\frac{dw_{F_L}}{dt} = \frac{F_L \cdot dx \cdot \sin 180}{dt} = -F_L \cdot v = -3,2 \cdot 4 = -12,8 \frac{J}{s}$$

$$\text{στ}_5) \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = (F - W - F_L) \cdot v = (8 - 4 - 3,2) \cdot 4 = +3,2 \frac{J}{s}$$

Σχόλια

α) Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα στο ερώτημα (στ) συμφωνούν με την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας, αφού ανά δευτερόλεπτο:



Ας προσέξουμε ότι μέσω του έργου της δύναμης Laplace αφαιρείται ενέργεια από τον αγωγό, η οποία εμφανίζεται ως ηλεκτρική στο κύκλωμα και μετατρέπεται τελικά σε θερμική στις αντιστάσεις του κυκλώματος.

β) - Για καθηγητές -

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι:

$$ma = (F - mg) - \frac{B^2 l^2}{R_{ολ}} v \Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} = (F - mg) - \frac{B^2 l^2}{R_{ολ}} v$$

$$\Leftrightarrow \frac{m R_{ολ}}{B^2 l^2} \frac{dv}{dt} + v = \frac{(F - mg) R_{ολ}}{B^2 l^2} \Leftrightarrow \tau \cdot \frac{dv}{dt} + v = v_{op}$$

όπου η σταθερά χρόνου είναι

$$\tau = \frac{m R_{ολ}}{B^2 l^2} = 0,5 s$$

Η οριακή ταχύτητα αποκτάται μετά από $t_{op} = 5\tau = 2,5 s$.

Για $t = 0$ είναι $v = 0$, άρα η χρονική εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει

$$v = v_{op}(1 - e^{-t/\tau}) \Leftrightarrow v = 5 \cdot (1 - e^{-2t}) \text{ (S.I.)}$$

$$\psi = v_{op}t + v_{op}\tau(e^{-t/\tau} - 1) \Leftrightarrow \psi = 5t + 2,5(e^{-2t} - 1) \text{ (S.I.)}$$

Από την τελευταία σχέση

$$\psi_{op} = v_{op} \cdot t_{op} + v_{op}\tau(0 - 1) = 4v_{op}\tau = 4 \cdot 5 \cdot 0,5 = 10 m$$

Το επαγωγικό φορτίο θα είναι

$$q_{επ} = \frac{|\Delta\Phi|}{R_{ολ}} \Leftrightarrow q_{επ} = \frac{B \cdot \Delta S}{R_{ολ}}$$

$$\Leftrightarrow q_{επ} = \frac{B \cdot l \cdot \psi_{op}}{R_{ολ}} \Leftrightarrow q_{επ} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10}{5} \Leftrightarrow q_{επ} = 4 C$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Ανδρέας Φιζόπουλος