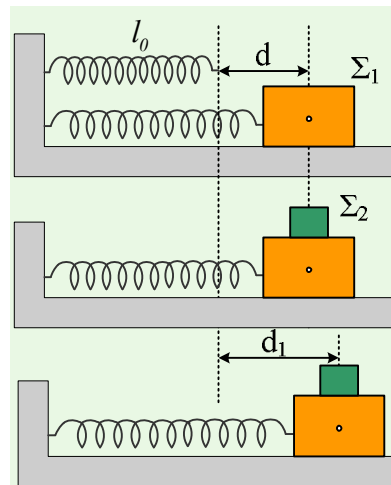


Οι επιταχύνσεις με ή χωρίς ολίσθηση

Ένα σώμα Σ_1 ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , με φυσικό μήκος l_0 . Εκτρέπουμε το σώμα προς τα δεξιά κατά d και αφήνοντάς το να κινηθεί, παρατηρούμε ότι η μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά, έχει μέτρο α_0 .



- i) Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αλλά τώρα τοποθετούμε πάνω στο σώμα Σ_1 , ένα δεύτερο σώμα Σ_2 , όπως στο μεσαίο σχήμα και παρατηρούμε ότι για την ίδια αρχική απομάκρυνση d , οριακά δεν υπάρχει ολίσθηση και τα δυο σώματα κινούνται μαζί. Η μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά τώρα το σώμα Σ_1 έχει μέτρο:

$$\alpha) \alpha_1 < \alpha_0, \quad \beta) \alpha_1 = \alpha_0, \quad \gamma) \alpha_1 > \alpha_0.$$

- ii) Αυξάνουμε την αρχική απομάκρυνση σε $d_1 = 4d/3$ και αφήνουμε το σύστημα των σωμάτων να κινηθεί. Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι ίσος με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης, ενώ $m_1 = 2m_2$, τότε:

- a) Η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ_2 έχει μέτρο:

$$\alpha) \alpha_2 < \alpha_0, \quad \beta) \alpha_2 = \alpha_0, \quad \gamma) \alpha_2 > \alpha_0.$$

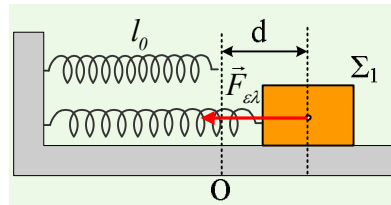
- b) Η αρχική επιτάχυνση που αποκτά το σώμα Σ_1 έχει μέτρο:

$$\alpha) \alpha'_1 < \alpha_0, \quad \beta) \alpha'_1 = \alpha_0, \quad \gamma) \alpha'_1 > \alpha_0.$$

- iii) Να εξηγήσετε γιατί στην τελευταία περίπτωση, τελικά το σύστημα θα εκτελέσει μια ΑΑΤ με ενέργεια ταλάντωσης μικρότερη από $\frac{1}{2}kd_1^2$.

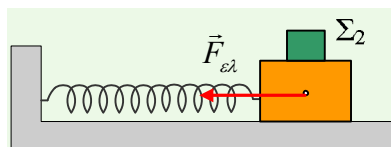
Απάντηση:

Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σώμα επιταχύνεται από την δύναμη του ελατηρίου, προς την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου O , όπου είναι και η θέση ισορροπίας για την ΑΑΤ που θα εκτελέσει, πλάτους $A=d$. Αλλά τότε η επιτάχυνση θα έχει μέγιστο μέτρο στην ακραία θέση, με μέτρο:



$$F_{ελ} = m_1 a_0 \rightarrow kd = m_1 a_0 \rightarrow a_0 = \frac{kd}{m_1} \quad (1)$$

- i) Αν τώρα έχουμε το σύστημα των δύο σωμάτων, όπου κινούνται μαζί σαν ένα σώμα, θα έχουμε την ίδια δύναμη του ελατηρίου να επιταχύνει το «σώμα» με μάζα $m = m_1 + m_2$, όπου m_1, m_2 οι μάζες των σωμάτων Σ_1



και Σ_2 αντίστοιχα. Αλλά τότε δουλεύοντας όπως προηγουμένως, θα έχουμε για την μέγιστη κατά μέτρο επιτάχυνση:

$$F_{ελ} = (m_1 + m_2) a_1 \rightarrow a_1 = \frac{kd}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

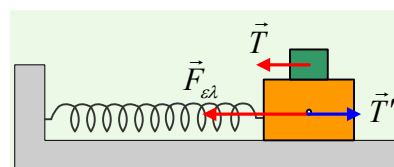
Από τη σύγκριση των (1) και (2) προκύπτει ότι $a_1 < a_0$. Σωστό το α).

Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας την θεωρία των ταλαντώσεων, θα έχουμε ότι μέγιστες επιταχύνσεις (κατά μέτρο) θα έχουμε στις θέσεις πλάτους, όπου για τα μέτρα τους έχουμε:

$$a_0 = \omega_0^2 A = \frac{D}{m_1} A = \frac{kd}{m_1} \quad \text{ενώ}$$

$$a_1 = \omega_1^2 A = \frac{D}{m_1 + m_2} A = \frac{kd}{m_1 + m_2}$$

- ii) Αφήνοντας χωρίς σχεδιασμό τις κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, οι οποίες δεν επηρεάζουν την κίνηση, έχουμε τις οριζόντιες δυνάμεις του διπλανού σχήματος. Με αρχική απομάκρυνση d , η δύναμη που επιταχύνει το σώμα Σ_2 είναι η τριβή και αφού οριακά δεν



έχουμε ολίσθηση, αυτή η τριβή είναι ίση με την οριακή τριβή $T_{op} = T_{ολ} = \mu N$. Αλλά ίση δύναμη τριβής θα ασκηθεί στο Σ_2 και όταν εκτρέψουμε το σύστημα κατά d_1 , ενώ «απαιτείται» δύναμη μεγαλύτερου μέτρου από πριν, αφού αν υποθέσουμε ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί, θα απαιτηθεί η εξάσκηση δύναμης:

$$F = m_2 a = m_2 \frac{kd_1}{m_1 + m_2} > m_2 \frac{kd}{m_1 + m_2}$$

Αλλά η τριβή δεν μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω, οπότε τα δυο σώματα θα κινηθούν ανεξάρτητα ή ισοδύναμα θα υπάρξει ολίσθηση του σώματος Σ_2 πάνω στο Σ_1 .

- a) Έτσι από το 2ο νόμο του Νεύτωνα, για το μέτρο της επιτάχυνσης του Σ_2 θα έχουμε:

$$\Sigma F = m_2 a_2 \rightarrow T_{ολ} = T_{op} = m_2 a_2 \rightarrow m_2 a_1 = m_2 a_2 \rightarrow a_2 = a_1$$

Ίση δηλαδή με την αρχική επιτάχυνση που απέκτησε το σώμα στο i) ερώτημα, επιτάχυνση μικρότερη από a_0 . Σωστό το α).

- b) Με την ίδια συλλογιστική για το σώμα Σ_1 ο 2ος νόμος δίνει:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= m_1 a'_1 \rightarrow F_{ελ} - T_{ολ} = m_1 a'_1 \rightarrow kd_1 - m_2 a_1 = m_1 a'_1 \rightarrow \\ a'_1 &= \frac{kd_1 - m_2 a_1}{m_1} = \frac{k \cdot \frac{4}{3} d - m_2 \frac{kd}{m_1 + m_2}}{m_1} = \frac{k \cdot \frac{4}{3} d - m_2 \frac{kd}{3m_2}}{m_1} = \frac{kd}{m_1} = a_0 \end{aligned}$$

Σωστό το β).

- iii) Η ενέργεια που προσφέραμε στο ελατήριο για να το επιμηκύνουμε κατά d_1 είναι ίση με την δυναμική ενέργεια που αποκτά το ελατήριο:

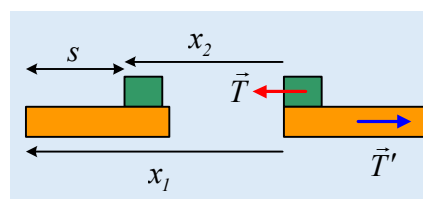
$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k d_1^2$$

Από τη στιγμή όμως που υπάρχει ολίσθηση του σώματος Σ_2 πάνω στο σώμα Σ_1 ένα μέρος της παραπάνω ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης, ίσο με:

$$Q_{\theta} = |W_T| = Ts$$

Όπου s η συνολική απόσταση που ολισθαίνει το σώμα Σ_2 πάνω στο Σ_1 . Αλλά τότε η ενέργεια που τελικά (μόλις σταματήσει κάθε ολίσθηση του Σ_2) θα έχει το σύστημα εκτελώντας ΑΑΤ θα είναι μικρότερη από $\frac{1}{2} k d_1^2$.

Προσοχή στην παραπάνω πρόταση! Το έργο της δύναμης T' , μετράει την ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα Σ_1 , μέσω της τριβής. Το έργο της τριβής T , ($W = T x_2$ όπου x_2 η μετατόπιση του σώματος Σ_2) εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται στο Σ_2 και μετατρέπεται σε κινητική του ενέργεια, ενώ το γινόμενο Ts μετράει την ενέργεια που αφαιρείται από το Σ_1 και εμφανίζεται ως θερμική, θερμαίνοντας τις τριβόμενες επιφάνειες των δύο σωμάτων. Και ένα σχήμα σε ... μεγέθυνση του κάτω σώματος, δίπλα.



dmargaris@gmail.com