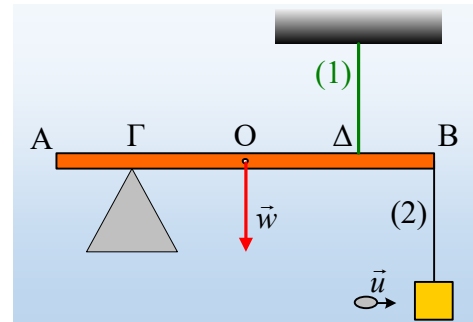


Η ράβδος σε ισορροπία και η πλάκα σε κίνηση

Η ομογενής ράβδος AB, μήκους 5m και βάρους 200N ισορροπεί σε οριζόντια θέση, ενώ στηρίζεται σε τρίποδο στο σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=1m και κρέμεται στο άκρο Δ κατακόρυφου νήματος (1), όπου (ΔΒ)=1m. Μια πλάκα μάζας $m_1=1,8\text{kg}$ κρέμεται στο άκρο του νήματος (2) μήκους 2m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στο άκρο Β της ράβδου.



- i) Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από το τρίποδο, κατά την παραπάνω ισορροπία.

Σε μια στιγμή μια σφαίρα μάζας $m_2=0,2\text{kg}$, η οποία κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u=40\text{m/s}$ σφηνώνεται στην πλάκα, δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα Σ, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων.

- ii) Να υπολογιστεί η ορμή και η στροφορμή, ως προς το άκρο Β της ράβδου, του συσσωματώματος Σ, αμέσως μετά την κρούση.
 iii) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος (1), καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Σ ως προς το Β, αμέσως μετά την κρούση,

Μετά από λίγο το σώμα Σ φτάνει σε μια θέση Ε, με μηδενική ταχύτητα, ενώ η ράβδος διαρκώς ισορροπεί. Για την στιγμή αυτή:

- iv) Να υπολογιστεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Σ, ως προς το άκρο Β της ράβδου.
 v) Να βρεθεί η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το τρίποδο στην ράβδο.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε ράβδο και πλάκα. Από την ισορροπία της πλάκας έχουμε:

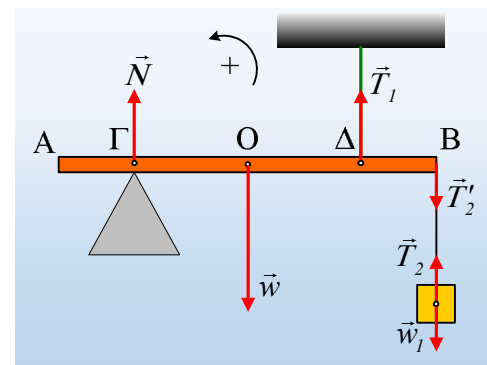
$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow T_2 = w_1 = m_1 g = 1,8 \cdot 10 \text{ N} = 18 \text{ N}$$

Οπότε η τάση του νήματος που ασκείται στο άκρο Β έχει επίσης μέτρο $T_2'=18\text{N}$, με φορά προς τα κάτω. Αλλά τότε από την ισορροπία της ράβδου, παίρνουμε για τις ροπές ως προς το Δ:

$$\Sigma \tau_{\Delta} = 0 \rightarrow -N \cdot (\Gamma\Delta) + w \cdot (O\Delta) - T_2' \cdot (\Delta B) = 0 \rightarrow$$

$$-N \cdot 3 + 200 \cdot 1,5 - 18 \cdot 1 = 0 \rightarrow N = \frac{282}{3} \text{ N} = 94 \text{ N}$$

- ii) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, παίρνουμε:



$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \rightarrow m_2 u = (m_1 + m_2) v = p \quad (1) \rightarrow$$

$$p = m_2 u = 0,2 \cdot 40 \text{ kgm/s} = 8 \text{ kgm/s}$$

Με κατεύθυνση, ίδια με την ταχύτητα u , όπως στο σχήμα. Εξάλλου η στροφορμή του σώματος Σ , ως προς το άκρο B της ράβδου, είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο σχήμα με μέτρο:

$$L = M v r = (m_1 + m_2) v \cdot \ell = p \cdot \ell = 8 \cdot 2 \text{ kgm}^2/\text{s} = 16 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

iii) Η ταχύτητα του Σ μετά την κρούση, υπολογίζεται από την παραπάνω εξίσωση (1):

$$v = \frac{m_2 u}{m_1 + m_2} = \frac{0,2 \cdot 40}{1,8 + 0,2} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε για το Σ ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma F_R = M \frac{v^2}{R} \rightarrow T_{21} - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2) \frac{v^2}{\ell} \rightarrow$$

$$T_{21} = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2) \frac{v^2}{\ell} = 2 \cdot 10 \text{ N} + 2 \frac{4^2}{2} \text{ N} = 36 \text{ N}$$

Όμως και η τάση T_{21} και το βάρος w_Σ του σώματος Σ διέρχονται από το σημείο B, συνεπώς η ροπή του είναι μηδενική, οπότε και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς το B, θα είναι μηδενικός:

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_B = \Sigma \tau_B \rightarrow \left(\frac{dL}{dt} \right)_B = \tau_{T_{21}} + \tau_{w_\Sigma} = 0$$

Εξάλλου από την ισορροπία της ράβδου, παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Γ, θα έχουμε:

$$\Sigma \tau_\Gamma = 0 \rightarrow -w \cdot (GO) + T_{11} \cdot (ΓΔ) - T'_{21} \cdot (ΓB) = 0 \rightarrow$$

$$-200 \cdot 1,5 + T_{11} \cdot 3 - 36 \cdot 4 = 0 \rightarrow T_{11} = 148 \text{ N}$$

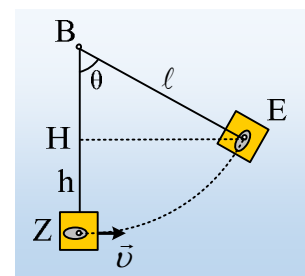
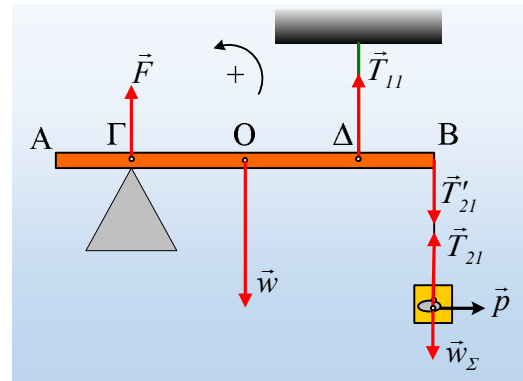
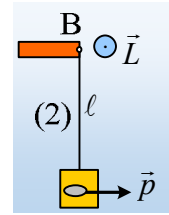
iv) Έστω Z η θέση του σώματος αμέσως μετά την κρούση, όπου έχει ταχύτητα $v=4\text{m/s}$. Στη συνέχεια κινείται σε κυκλική τροχιά κέντρου B και ακτίνας l και φτάνει με μηδενική ταχύτητα στην θέση E, σε ύψος h , όπως στο σχήμα. Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων Z και E, θεωρώντας $U_Z=0$, παίρνουμε:

$$K_Z + U_Z = K_E + U_E \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M v^2 + 0 = 0 + M g h \rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4^2}{2 \cdot 10} \text{ m} = 0,8 \text{ m}$$

Αλλά τότε για την μέγιστη γωνία εκτροπής θ θα έχουμε:

$$\sin \theta = \frac{(BH)}{(BE)} = \frac{\ell - h}{l} = \frac{2 - 0,8}{2} = 0,6$$



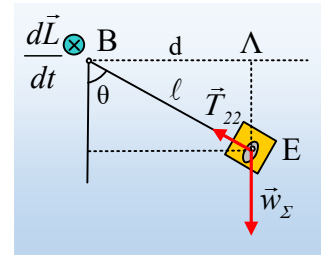
Και από την θεμελιώδη τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \rightarrow \eta\mu\theta = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta} = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

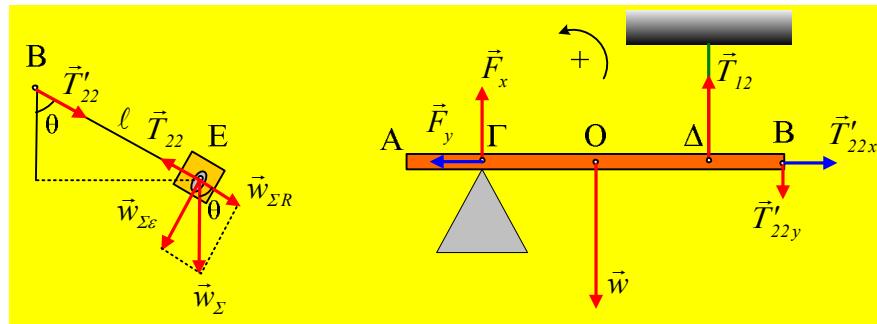
Αφού στην θέση E η ταχύτητα του συσσωματώματος Σ είναι μηδενική, μηδενική θα είναι και η στροφορμή του ως προς το B. Ενώ αντίθετα, υπάρχει ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του, ως προς το B με κατεύθυνση όπως στο σχήμα και με μέτρο:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_B = \Sigma\tau_B = w_\Sigma \cdot d + T_{22} \cdot \ell = (m_1 + m_2)g \cdot \ell \eta\mu\theta \rightarrow$$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_B = 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0,8 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 32 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$



- ν) Στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα Σ. Εξαιτίας της μηδενικής ταχύτητας στην διεύθυνση της ακτίνας, $\Sigma F_R = 0$, οπότε:



$$T_{22} = w_{\Sigma R} = (m_1 + m_2)g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 2 \cdot 10 \cdot 0,6 \text{ N} = 12 \text{ N} = T'_{22}$$

Αναλύοντας την T_{22} σε δύο συνιστώσες, παίρνουμε τις συνιστώσες, όπως στο δεξιό σχήμα με μέτρα:

$$T'_{22x} = T'_{22} \cdot \eta\mu\theta = 12 \cdot 0,8 \text{ N} = 9,6 \text{ N} \text{ και}$$

$$T'_{22y} = T'_{22} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 12 \cdot 0,6 \text{ N} = 7,2 \text{ N}$$

Ενώ από την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0, \quad (2) \quad \Sigma F_y = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0, \quad (4) \quad \text{ως προς οποιοδήποτε σημείο.}$$

Οπότε από την (2) θα έχουμε:

$$F_x = T'_{22x} = 9,6 \text{ N}$$

ενώ από την (4) ως προς το σημείο Δ:

$$\Sigma \tau_\Delta = 0 \rightarrow -F_y \cdot (\Gamma\Delta) + F_x \cdot 0 + w \cdot (O\Delta) - T'_{22y} \cdot (\Delta B) + T'_{22y} \cdot 0 = 0 \rightarrow$$

$$-F_y \cdot 3 + 200 \cdot 1,5 - 8 \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$F_y = 97,3 \text{ N}$$