

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Τα σώματα του σχήματος είναι λεπτές πλάκες με μάζες m_1 και m_2 , ενώ τα κατακόρυφα παραμορφωμένα ελατήρια στα οποία έχουν δεθεί σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Τα σώματα είναι αρχικά ακίνητα και το κατακόρυφο νήμα που τα συνδέει είναι αβαρές, μη εκτατό και η διεύθυνση του ταυτίζεται με τον άξονα των ελατηρίων.

Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα οπότε οι πλάκες αρχίζουν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με τα σώματα να φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες τους θέσεις.

1) Να αποδειχθεί ότι κάθε χρονική στιγμή η ορμή p του συστήματος των πλακών είναι μηδενική.

2) Να αποδειχθεί ότι κάθε χρονική στιγμή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) x_1 = -\frac{k_2}{k_1} x_2 \quad \beta) v_1 = -\frac{k_2}{k_1} v_2 \quad \gamma) a_1 = -\frac{k_2}{k_1} a_2$$

όπου x_1, x_2 οι απομακρύνσεις, v_1, v_2 οι ταχύτητες και a_1, a_2 οι επιταχύνσεις των πλακών με μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα.

3) Να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) U_1 = \frac{k_2}{k_1} U_2 \quad \beta) K_1 = \frac{k_2}{k_1} K_2 \quad \gamma) E_1 = \frac{k_2}{k_1} E_2$$

όπου U_1, U_2 οι δυναμικές ενέργειες των ταλαντώσεων, K_1, K_2 οι κινητικές ενέργειες και E_1, E_2 οι ενέργειες των πλακών με μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα. Δίνεται ότι:

$$\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{και} \quad \eta\mu\frac{3\pi}{2} = -1$$

Λύση

1) Πριν την κοπή του νήματος τα σώματα ισορροπούν.

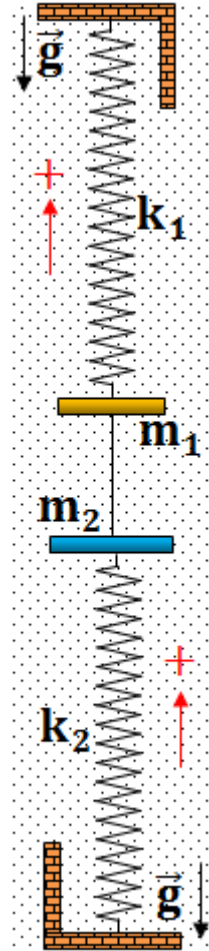
$$m_1: \Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow F_1 - w_1 - T_1 = 0 \Leftrightarrow F_1 - w_1 = T_1 \quad (1)$$

$$m_2: \Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow F_2 - w_2 + T_2 = 0 \Leftrightarrow w_2 - F_2 = T_2 \quad (2)$$

Τη στιγμή της κοπής του νήματος τα σώματα ξεκινούν απλή αρμονική ταλάντωση από ακραίες θέσεις.

$$m_1: |\Sigma F_1| = k_1 A_1 \Leftrightarrow F_1 - w_1 = k_1 A_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} T_1 = k_1 A_1 \quad (3)$$

$$m_2: |\Sigma F_2| = k_2 A_2 \Leftrightarrow w_2 - F_2 = k_2 A_2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} T_2 = k_2 A_2 \quad (4)$$



Όμως

$$T_1 = T_2 \stackrel{(3),(4)}{\Leftrightarrow} k_1 A_1 = k_2 A_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{k_2}{k_1} \quad (5)$$

Επιπλέον οι περίοδοι των ταλαντώσεων των σωμάτων είναι ίσες αφού τα σώματα φτάνουν συγχρόνως στις ακραίες τους θέσεις. Άρα:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &\Leftrightarrow \omega_1^2 = \omega_2^2 \Leftrightarrow \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} \quad (6) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{m_2}{m_1} \Leftrightarrow m_1 A_1 = m_2 A_2 \quad (7)$$

Η ορμή του συστήματος των δυο σωμάτων είναι:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 \Leftrightarrow p = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ p &= m_1 \omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + m_2 \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &\text{όπου} \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \frac{3\pi}{2} \text{ και } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} p &= m_1 \omega_1 A_1 \sin\left(\omega_1 t + \frac{3\pi}{2}\right) + m_2 \omega_2 A_2 \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(6),(7)}{\Leftrightarrow} \\ p &= -m_1 \omega_1 A_1 \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + m_1 \omega_1 A_1 \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\quad p = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

2) Εφόσον η ορμή του συστήματος των σωμάτων είναι μηδενική άρα σταθερή η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδενική.

$$\begin{aligned} p = 0 &\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Leftrightarrow \Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0 \Leftrightarrow \Sigma F_1 + \Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &-k_1 x_1 - k_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{k_2}{k_1} x_2 \quad (a) \end{aligned}$$

Από την (a) με παραγωγή προκύπτουν:

$$v_1 = -\frac{k_2}{k_1} v_2 \quad \beta) \text{ και } a_1 = -\frac{k_2}{k_1} a_2 \quad (\gamma)$$

3) Ο λόγος των δυναμικών ενεργειών των ταλαντώσεων είναι:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 x_1^2}{\frac{1}{2} k_2 x_2^2} \stackrel{(2a)}{\Leftrightarrow} \frac{U_1}{U_2} = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{k_2}{k_1} \Leftrightarrow U_1 = \frac{k_2}{k_1} U_2 \quad (a)$$

Με ανάλογη διαδικασία προκύπτουν:

$$K_1 = \frac{k_2}{k_1} K_2 \quad (\beta) \text{ και } E_1 = \frac{k_2}{k_1} E_2 \quad (\gamma)$$

