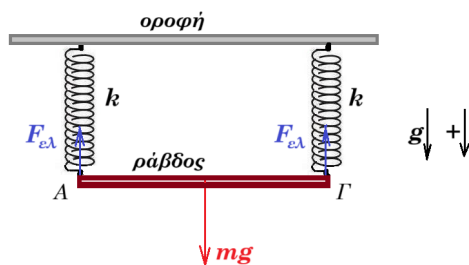


Στο σχήμα, η ράβδος ΑΓ μάζας $m = 1 \text{ kg}$ ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Τα άκρα της Α, Γ συνδέονται στα άκρα των δύο όμοιων ιδανικών ελατηρίων σταθεράς $k = 50 \text{ N/m}$. Απομακρύνουμε την ράβδο κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $\chi_0 = 0,1 \text{ m}$ και τη στιγμή $t_0 = 0$ την αφήνουμε ελεύθερα να κινηθεί.



Α) Δείξτε ότι η ράβδος θα εκτελέσει Α.Α.Τ., βρείτε την συχνότητα της ταλάντωσης της ράβδου.

Β) Σχεδιάστε σε βαθμολογημένους άξονες την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της ράβδου από τη Θ.Ι. της, της ταχύτητάς της, της επιτάχυνσής της, συναρτήσει του χρόνου.

Γ) Σχεδιάστε σε βαθμολογημένους άξονες την γραφική παράσταση

i) της δύναμης που δέχεται η ράβδος από κάθε ελατήριο συναρτήσει (α) του χρόνου t , (β) της απομάκρυνσης x ,

ii) της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου συναρτήσει της απομάκρυνσης x της ράβδου από τη θέση ισορροπίας της,

iii) της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης της ράβδου συναρτήσει της απομάκρυνσής της από τη θέση ισορροπίας της.

Δ) Βρείτε την ενέργεια του συστήματος «ελατηρίων - ράβδου» καθώς η ράβδος κινείται και την ενέργεια ταλάντωσης της ράβδου.

Ε) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης της ράβδου τη στιγμή που η επιτάχυνση της είναι $+5 \text{ m/s}^2$.

μία λύση :

(Α) ισορροπία ράβδου : $\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - 2k\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l = mg / 2k = 10 / 100 \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$ επιμήκυνση ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ράβδου

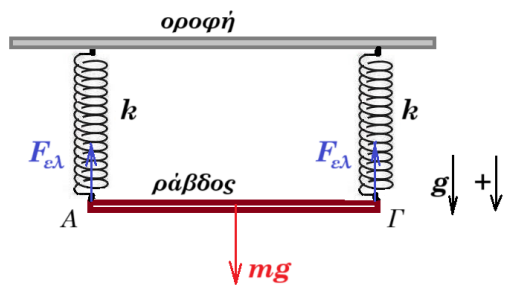
όταν αφήσουμε ελεύθερη τη ράβδο, αυτή κινείται προς τα πάνω και έστω x μια τυχαία απομάκρυνση από τη Θ.Ι. της τότε : $\Sigma F = mg - 2k(\Delta l + x) = mg - 2k\Delta l - 2kx = -2kx \Rightarrow \Sigma F = -2kx$

η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη ράβδο είναι ανάλογη της απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. της αυτό σημαίνει ότι η ράβδος θα εκτελέσει Απλή Αρμονική Ταλάντωση με σταθερά $D = 2k = 2 \cdot 50 \text{ N/m} = 100 \text{ N/m}$ και κυκλική συχνότητα : $\omega^2 = D/m = 100 \text{ N/m} / 1 \text{ kg} = 100 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$

συχνότητα της ταλάντωσης : $f = \omega / 2\pi = 10 / 2\pi \text{ Hz} = 5/\pi \text{ Hz}$, χρόνος περιόδου : $T = 1/f = \pi/5 \text{ s}$

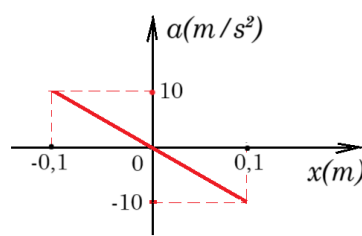
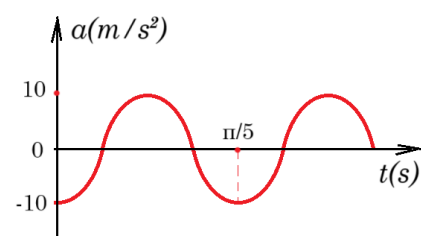
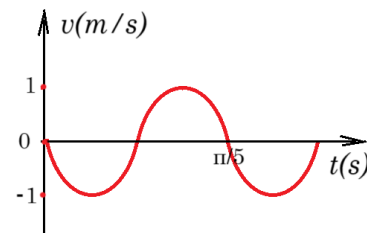
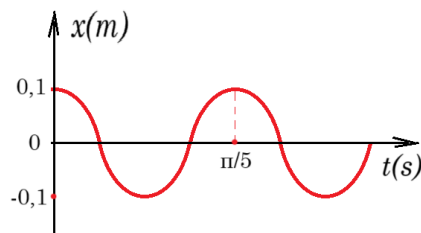
το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = \chi_0 = 0,1 \text{ m}$ διότι τη στιγμή $t_0 = 0$ η ράβδος έχει μηδενική ταχύτητα και είναι σε απομάκρυνση χ_0 από τη θέση ισορροπίας της προς τα κάτω (θετική κατεύθυνση) άρα είναι σε απομάκρυνση $+A$

(B) συνεπώς : $x = 0,1 \eta\mu(10t + \pi/2)$ $v = 1 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2)$ $a = -10 \eta\mu(10t + \pi/2)$



$$\begin{aligned} x(t) &= 0,1 \eta\mu(10 \cdot t + \pi/2) = 0,1 \sigma\upsilon\nu(10 \cdot t) \\ v(t) &= 1 \sigma\upsilon\nu(10 \cdot t + \pi/2) = -1 \eta\mu(10 \cdot t) \\ a(t) &= -10 \eta\mu(10 \cdot t + \pi/2) = -10 \sigma\upsilon\nu(10 \cdot t) \\ a(x) &= -100 x \quad -0,1m \leq x \leq +0,1m \end{aligned}$$

$$T = 2\pi/10 = \pi/5 \text{ s}$$

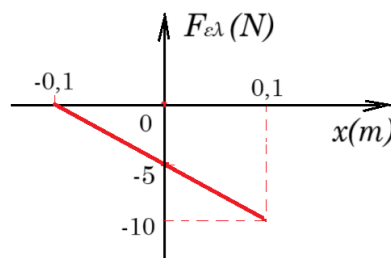
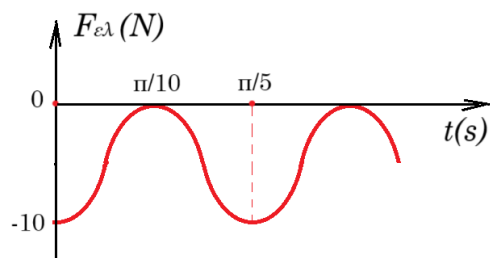


(Γ)

$$m = 1kg \quad \Sigma F = ma = 1 [-10 \sigma\upsilon\nu(10 t)] = -10 \sigma\upsilon\nu(10 t)$$

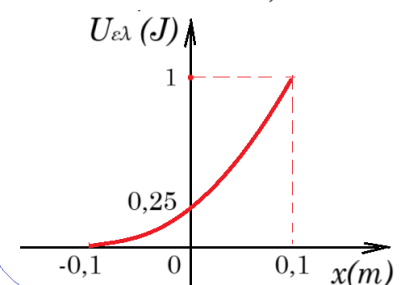
$$mg + 2F_{ελ} = ma \Rightarrow 10 + 2F_{ελ} = -10 \sigma\upsilon\nu(10 t) \Rightarrow F_{ελ}(t) = -5 - 5 \sigma\upsilon\nu(10 t) \quad t \geq 0$$

$$\eta \quad 10 + 2F_{ελ} = -100 x \Rightarrow F_{ελ}(x) = -5 - 50 x = -50 (x + 0,1) \quad -0,1m \leq x \leq +0,1m$$

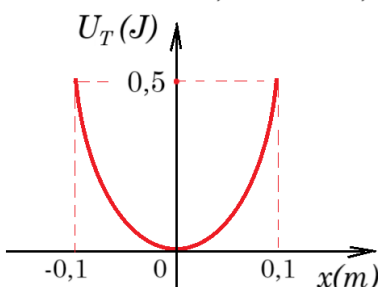


$$\begin{aligned} U_{ελ}(x) &= \frac{1}{2} k (x + \Delta l)^2 = \frac{1}{2} 50 (x + 0,1)^2 = \\ &= 25 (x + 0,1)^2 \end{aligned}$$

$$-0,1m \leq x \leq +0,1m$$



$$\begin{aligned} U_T(x) &= \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} 100 x^2 = 50 x^2 \\ &-0,1m \leq x \leq +0,1m \end{aligned}$$



(Δ) θεωρούμε σαν επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κατώτατη θέση ταλαντώσεως της ράβδου η δυναμική ενέργεια βαρύτητας είναι

$$U_{\beta\alpha\rho} = m g h = m g (A - x) = 1 \cdot 10 (0,1 - x) = 1 - 10 x =$$

$$= 1 - 10 \cdot 0,1 \eta\mu(10t + \pi/2) = 1 - \eta\mu(10t + \pi/2) = 1 - \sigma\upsilon\nu(10t)$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

(1) όταν η ράβδος είναι στην κάτω ακραία θέση $x = + 0,1 \text{ m}$ οπότε $v = 0$, έχει

$$\text{δυναμική ενέργεια βαρύτητας } U_{\beta\alpha\rho} = m g h = 0$$

κινητική ενέργεια μηδέν

τα ελατήρια είναι επιμηκυμένα κατά $0,2 \text{ m}$, έχουν δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,2^2 = 1 \text{ J}$ το κάθε ένα άρα τα δύο ελατήρια έχουν ενέργεια 2 J

$$\text{η ενέργεια του συστήματος είναι } U_{\beta\alpha\rho} + K + U_{\epsilon\lambda} = 0 + 0 + 2 \text{ J} = 2 \text{ J}$$

(2) όταν η ράβδος διέρχεται από την θέση ισορροπίας της : $x = 0$ οπότε $v = +1 \text{ m/s}$ αν κινείται προς τα κάτω ή $v = -1 \text{ m/s}$ αν κινείται προς τα πάνω, έχει

$$\text{δυναμική ενέργεια βαρύτητας } U_{\beta\alpha\rho} = m g h = 1 \text{ kg } 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,1 \text{ m} = 1 \text{ J}$$

$$\text{κινητική ενέργεια μέγιστη } K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5 \text{ J}$$

τα ελατήρια είναι επιμηκυμένα κατά $0,1 \text{ m}$, έχουν δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,1^2 = 0,25 \text{ J}$ το κάθε ένα άρα τα δύο ελατήρια έχουν ενέργεια $0,5 \text{ J}$

$$\text{η ενέργεια του συστήματος είναι } U_{\beta\alpha\rho} + K + U_{\epsilon\lambda} = 1 \text{ J} + 0,5 \text{ J} + 0,5 \text{ J} = 2 \text{ J}$$

(3) όταν η ράβδος είναι στην πάνω ακραία θέση $x = - 0,1 \text{ m}$ οπότε $v = 0$ έχει

$$\text{δυναμική ενέργεια βαρύτητας } U_{\beta\alpha\rho} = m g h = 1 \text{ kg } 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ m} = 2 \text{ J}$$

κινητική ενέργεια μηδέν

τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος οπότε η δυναμική τους ενέργεια είναι μηδέν

$$\text{η ενέργεια του συστήματος είναι } U_{\beta\alpha\rho} + K + U_{\epsilon\lambda} = 2 \text{ J} + 0 + 0 = 2 \text{ J}$$

$$\text{η ενέργεια της ταλάντωσης της ράβδου είναι : } E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,1^2 = 0,5 \text{ J}$$

(Ε) $\alpha = +5 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha = -\omega^2 x \Rightarrow 5 = -100 x \Rightarrow x = -0,05 \text{ m} = -A/2$ αυτή η θέση είναι πάνω από τη Θ.Ι. της ράβδου

τότε τα ελατήρια έχουν επιμήκυνση $\Delta l = 0,05 \text{ m}$ οπότε η κατεύθυνση των δυνάμεων των ελατηρίων είναι προς τα πάνω, συνεπώς έχουμε : $\Sigma F = ma \Rightarrow mg - 2k \Delta l = ma \Rightarrow +1 \text{ kg } 10 \text{ m/s}^2 - 100 \text{ N/m } 0,05 \text{ m} = 1 \text{ kg } \alpha \Rightarrow \alpha = +5 \text{ m/s}^2$ (επαλήθευση)

διατήρηση ενέργειας για την ταλάντωση :

$$\frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow 100 \cdot 0,05^2 + \frac{1}{2} v^2 = 100 \cdot 0,1^2 \Rightarrow 0,25 + \frac{1}{2} v^2 = 1 \Rightarrow v^2 = 0,75 = 3/4 \Rightarrow v = \pm \sqrt{3}/2 \text{ m/s}$$

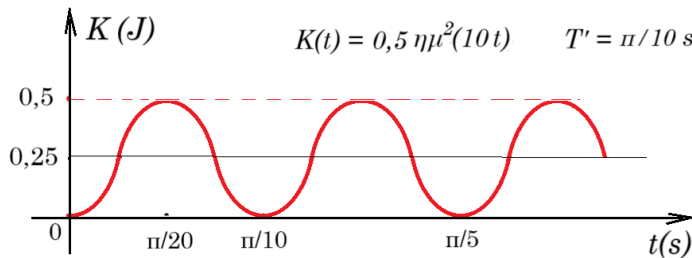
όταν η ράβδος κινείται προς τα κάτω (θετική κατεύθυνση) η ταχύτητά της έχει μέτρο $v = +\sqrt{3}/2 \text{ m/s}$, η ράβδος κινείται προς την Θ.Ι. της, οπότε η κινητική της ενέργεια αυξάνεται, τότε ο ρυθμός μεταβολής $dU_T / dt = D x v = 100 \text{ N/m } (-0,05 \text{ m}) (+\sqrt{3}/2 \text{ m/s}) = -5\sqrt{3}/2 \text{ J/s} < 0$ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται

όταν η ράβδος κινείται προς τα πάνω (αρνητική κατεύθυνση) η ταχύτητά της έχει μέτρο $v = -\sqrt{3}/2 \text{ m/s}$, η ράβδος κινείται προς την άνω ακραία θέση της ταλάντωσης οπότε η κινητική της ενέργεια μειώνεται, τότε ο ρυθμός μεταβολής $dU_T / dt = D x v = 100 \text{ N/m } (-0,05 \text{ m}) (-\sqrt{3}/2 \text{ m/s}) = +5\sqrt{3}/2 \text{ J/s} > 0$ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης αυξάνεται

κάτι επιπλέον :

κινητική ενέργεια σώματος

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 1 \text{ συν}^2(10t + \pi/2) = 0,5 [-\eta\mu(10t)]^2 = 0,5 \eta\mu^2(10t)$$



δυναμική ενέργεια ταλάντωσης σώματος

$$U_T = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} 100 [0,1 \eta\mu(10t + \pi/2)]^2 = \frac{1}{2} 100 [0,1 \text{ συν}(10t)]^2 = 50 \cdot 0,01 \text{ συν}^2(10t) = 0,5 \text{ συν}^2(10t)$$

