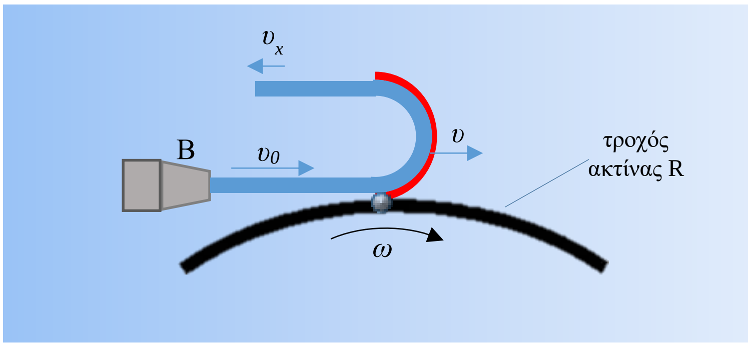
Ένας νερόμυλος και η ωφέλιμη παροχή



Μια δέσμη νερού ταχύτητας $\upsilon_0 = 12m/s$ και εμβαδού διατομής $A = 0{,}1m^2$, εκτοξεύεται οριζόντια από το ακροφύσιο Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη συνέχεια χτυπάει το ειδικά διαμορφωμένο πτερύγιο του τροχού ενός νερόμυλου, το οποίο έχει κατακόρυφη τομή ημικύκλιο και ανακλάται κατά γωνία 180^0. Ο τροχός στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 6rad/s$, ενώ η ακτίνα περιστροφής του κέντρου του πτερυγίου, γύρω από το κέντρο του νερόμυλου είναι $R = 1m$. Η προσπίπτουσα δέσμη νερού συναντάει το πτερύγιο, όταν αυτό βρίσκεται στην ανώτερη θέση, κατά την περιστροφή του τροχού του νερόμυλου.

α) Ποια είναι η παροχή του ακροφυσίου Β και ποια η «ωφέλιμη» παροχή για το νερόμυλο;

β) Βρείτε μια έκφραση για τη μηχανική ισχύ που προσφέρεται από τη δέσμη νερού στο πτερύγιο, σε συνάρτηση με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του. Τι αποτέλεσμα δίνει αυτή η σχέση για τα δεδομένα της άσκησης;

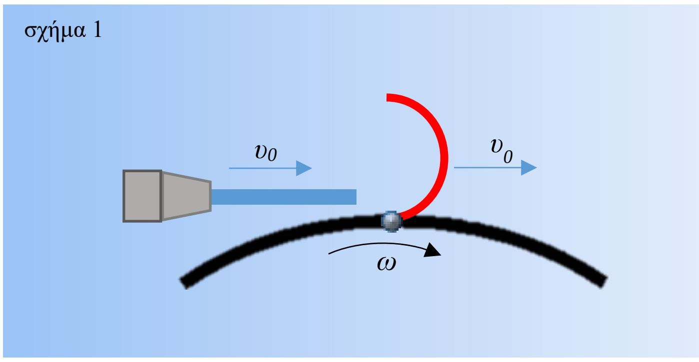
γ) Για ποια τιμή του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας ω, η ισχύς που προσφέρεται μεγιστοποιείται; Να κάνετε τη γραφική παράσταση $P=f(\omega)$ σε βαθμολογημένους άξονες.

Απάντηση

Η παροχή του ακροφυσίου προφανώς είναι

$$\Pi = A\cdot\upsilon_0 = 0{,}1\cdot 12 = 1{,}2m^3/s$$

Για να μπορέσει να προσφέρει στο νερόμυλο ενέργεια η δέσμη νερού, πρέπει να ασκήσει δύναμη με την πρόσπτωση πάνω στο πτερύγιο.



Ας σκεφτούμε τι θα συνέβαινε αν το πτερύγιο απομακρυνόταν από τη δέσμη νερού με την ίδια ταχύτητα υ_0 (σχήμα 1).

Το νερό δε θα μπορούσε να προλάβει το πτερύγιο, άρα δε θα ασκούσε καμιά δύναμη πάνω του. Η παραπάνω παροχή θα ήταν άχρηστη, αφού πρέπει να μετρήσουμε με ποια ταχύτητα φτάνει το νερό στο πτερύγιο. Δηλαδή ένας αισθητήρας πάνω στο πτερύγιο τι ταχύτητα θα μετρούσε; Στο παράδειγμά μας, προφανώς η ταχύτητα εισόδου θα είναι $\upsilon_{in} = \upsilon_0 - \upsilon_0 = 0$

Στην άσκηση όμως το πτερύγιο απομακρύνεται με $\upsilon = \omega\cdot R$, άρα ο αισθητήρας του πτερυγίου καταγράφει μέτρο ταχύτητας

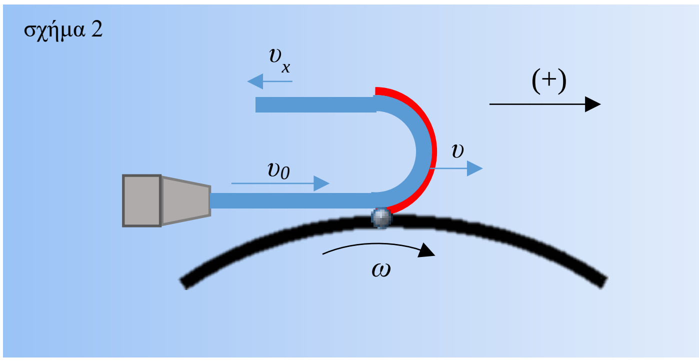
$\upsilon_{in} = \upsilon_0 - \upsilon \Leftrightarrow \upsilon_{in} = \upsilon_0 - \omega R$, με φορά προς τα δεξιά.

Η ωφέλιμη παροχή είναι επομένως $\Pi_{\omega\varphi} = A\cdot\upsilon_{in} \Leftrightarrow \boxed{\Pi_{\omega\varphi} = A\cdot(\upsilon_0 - \omega R)}$ (1)

Με αντικατάσταση η (1) δίνει $\Pi_{\omega\varphi} = 0{,}1 \cdot (12 - 6 \cdot 1) = 0{,}6\, m^3 / s$

δηλαδή τη μισή της πραγματικής.

β) Όπως φαίνεται στο σχήμα 2, η δέσμη νερού κινείται χωρίς τριβές στο εσωτερικό του πτερυγίου, αλλάζοντας φορά σε ελάχιστο χρόνο και στη συνέχεια εγκαταλείπει το πτερύγιο με ταχύτητα **ως προς αυτό** μέτρου $\upsilon_{out} = \upsilon_{in}$ αλλά με φορά προς τα αριστερά.



Η δύναμη δράσης, που δέχεται το πτερύγιο οφείλεται στη μεταβολή της ορμής της προσπίπτουσας μάζας του νερού. Θα βρούμε πρώτα τη δύναμη αντίδρασης, που δέχεται το νερό από το πτερύγιο.

Από τον 2ο Νόμο Newton για μια «ωφέλιμη» στοιχειώδη μάζα νερού $dm_{\omega\varphi}$, που εξέρχεται σε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt από το ακροφύσιο.

$$F = \frac{dp}{dt} \Leftrightarrow F = \frac{dm_{\omega\varphi} \cdot (-\upsilon_{out} - \upsilon_{in})}{dt}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{\rho \cdot dV_{\omega\varphi} \cdot [-(\upsilon_0 - \upsilon) - (\upsilon_0 - \upsilon)]}{dt}$$

$$\Leftrightarrow F = -\rho \cdot \Pi_{\omega\varphi} \cdot (2\upsilon_0 - 2\upsilon) \Leftrightarrow$$

$$F = -2\rho \cdot A \cdot (\upsilon_0 - \omega R)^2$$

Η δύναμη $\vec{F}'$ που θα ασκείται στο πτερύγιο, ως δράση, θα είναι αντίθετη άρα:

$$F' = 2\rho \cdot A \cdot (\upsilon_0 - \omega R)^2$$

Η παρεχόμενη ισχύς θα είναι

$$P = F' \cdot \upsilon \Leftrightarrow \boxed{P = 2\rho \cdot A \cdot \omega R \cdot (\upsilon_0 - \omega R)^2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει $P = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1} \cdot \omega \cdot 1 \cdot (12 - \omega \cdot 1)^2 \Leftrightarrow$

$\boxed{P = 200\omega(12 - \omega)^2}$ (S.I.)   (2)

Για τα δεδομένα της άσκησης η σχέση (2) δίνει

$$P = 200 \cdot 6 \cdot 6^2 = 43{,}2 \cdot 10^3 W$$

γ) Η μεγιστοποίηση της ισχύος βρίσκεται αν παραγωγίσουμε την (2) και μηδενίσουμε την παράγωγο.

$$\frac{dP}{d\omega} = 600(\omega^2 - 16\omega + 48)\ \text{(S.I.)}$$

Η παράγωγος μηδενίζεται για $\omega = 4 rad/s$ ή $\omega = 12 rad/s$. Η δεύτερη λύση απορρίπτεται αφού τότε δε θα μπορεί το νερό να προσκρούσει, όπως είδαμε στο (α) ερώτημα.

Άρα δεκτή είναι η τιμή $\omega = 4 rad/s$. Τότε η προσφερόμενη ισχύς γίνεται

$$P_{max} = 200 \cdot 4 \cdot (12-4)^2 = 800 \cdot 64 = 5{,}12 \cdot 10^4 W$$

Η γραφική παράσταση $P=f(\omega)$ είναι

Σχόλια

α) Η ταχύτητα ως προς το έδαφος, με την οποία ανακλάται το νερό θα βρεθεί αν σκεφτούμε ότι

$$\upsilon_{in} = \upsilon_{out} \Leftrightarrow \upsilon_0 - \upsilon = -(\upsilon_x - \upsilon) \Leftrightarrow \upsilon_x = 2\upsilon - \upsilon_0 \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_x = 2\omega R - \upsilon_0$$

Με τα δεδομένα της άσκησης παίρνουμε: $\upsilon_x = 2 \cdot 6 \cdot 1 - 12 = 0$.

Όταν επιλέξουμε το ω ώστε να παρέχεται η μέγιστη ισχύς, παίρνουμε:
$\upsilon_x = 2 \cdot 4 \cdot 1 - 12 = -4 m/s$

β) Αν το πλήθος των πτερυγίων είναι πολύ μεγάλο, τότε η εξερχόμενη από το ακροφύσιο δέσμη νερού θα μπορεί να συναντάει και πτερύγια, που θα έχουν μικρότερες σχετικές ταχύτητες στη διεύθυνση της δέσμης, σε σχέση με το ανώτερο.

Σε αυτή την περίπτωση, χωρίς μεγάλο σφάλμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρη την παροχή του ακροφυσίου, στον υπολογισμό της δύναμης ή της ισχύος.

Δηλαδή $F = -\rho \cdot \Pi \cdot (2\upsilon_0 - 2\upsilon)$

Ανδρέας Ριζόπουλος