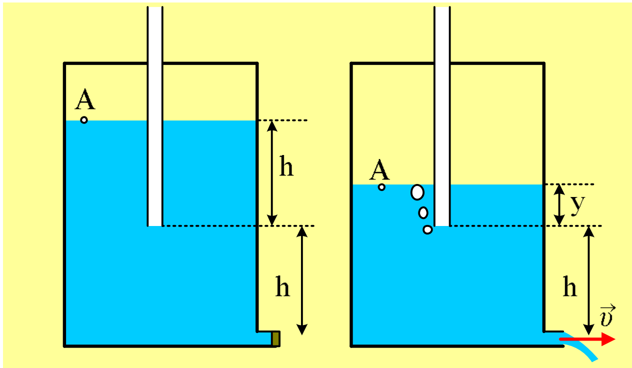
Μια ροή με σταθερή παροχή

Διαθέτουμε ένα κυλινδρικό δοχείο με εμβαδόν βάσεως $1m^2$, το οποίο περιέχει νερό σε ύψος 2h=1,6m. Το δοχείο είναι κλειστό, ενώ επικοινωνεί με την ατμόσφαιρα με τη βοήθεια ενός κατακόρυφου σωλήνα, ο οποίος είναι βυθισμένος στο νερό κατά h, χωρίς το νερό να έχει εισχωρήσει στο εσωτερικό του, όπως δείχνει το πρώτο σχήμα.



i) Να υπολογιστεί η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα στο δοχείο, πάνω από την επιφάνεια του νερού.

ii) Κοντά στον πυθμένα του δοχείου υπάρχει ένας οριζόντιος σωλήνας διατομής $A=2cm^2$, που κλείνεται με τάπα. Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής του νερού, μόλις ανοίξουμε την τάπα και αποκατασταθεί μόνιμη ροή.

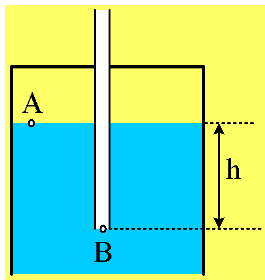
Μόλις αρχίσει η ροή, εισχωρεί από τον κατακόρυφο σωλήνα αέρας στο δοχείο, δημιουργώντας φυσαλίδες, όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα, ενώ η επιφάνεια του νερού υποχωρεί.

iii) Να βρείτε την ταχύτητα εκροής του νερού από το σωλήνα σε συνάρτηση με το τμήμα του κατακόρυφου σωλήνα που βυθίζεται στο νερό (υ=f(y)), μέχρι που η επιφάνεια του νερού στο δοχείο να φτάσει στο κάτω άκρο του σωλήνα (y=0).

iv) Σε πόσο χρόνο δεν θα βυθίζεται καθόλου ο κατακόρυφος σωλήνας στο νερό;

Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000kg/m^3$, $g=10m/s^2$, ενώ το νερό θεωρείται ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό.

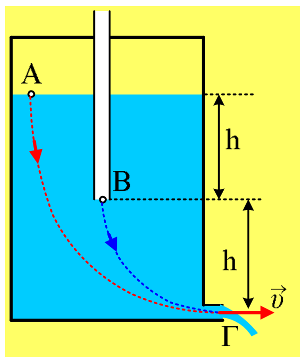
Απάντηση:



i) Η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα είναι ίση με την πίεση στο σημείο Α της επιφάνειας του νερού. Έστω ένα δεύτερο σημείο Β, στο κάτω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα που και αυτό ανήκει στο νερό, ενώ ταυτόχρονα γνωρίζουμε την πίεση στο σημείο αυτό, αφού είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Για την διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο αυτών σημείων του υγρού που απέχουν κατακόρυφα κατά h, έχουμε:

$$p_B - p_A = \rho g h \rightarrow \ p_A = p_B - \rho g h \ \ (1) \rightarrow$$

$$p_{αερ} = p_{ατμ} - \rho g h = 10^5 Pa - 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}8 Pa = 92.000 Pa.$$



ii) Μόλις ανοίξουμε την τάπα, σε ελάχιστο χρόνο θα αποκατασταθεί μια μόνιμη ροή με ταχύτητα εκροής του νερού υ. Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί μια ρευματική γραμμή ΑΓ, κατά μήκος της οποίας εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli.

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + \rho g \cdot 2h = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \ (2)$$

Αλλά το εμβαδόν της επιφάνειας είναι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο εμβαδόν της οπής, με αποτέλεσμα η ταχύτητα $υ_A$ είναι σχεδόν μηδενική και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$p_A + 2\rho g h = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(p_A - p_{ατμ})}{\rho} + 4gh} \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(92.000 - 100.000)}{1.000} + 4 \cdot 10 \cdot 0{,}8}\frac{m}{s} = 4m/s$$

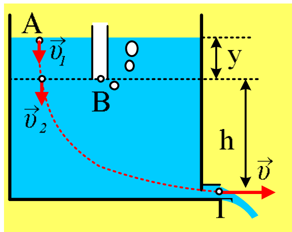
Σημείωση: Η εξίσωση (2) με αντικατάσταση της πίεσης του Α, όπως προέκυψε από την (1) παίρνει τη μορφή:

$$p_{ατμ} - \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 + \rho g \cdot 2h = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \overset{\upsilon_A=0}{\Longrightarrow}$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \quad (3) \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8}\frac{m}{s} = 4m/s$$

Η σχέση (3) παραπέμπει στο θεώρημα Torricelli, όπου το νερό εκρέει από βάθος h, όσο είναι το βάθος της οπής, από το κάτω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα (σημείο Β). Με άλλα λόγια θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη ρευματική γραμμή (μπλε γραμμή) που οδηγεί από το Β στο Γ και να παίρναμε εξίσωση Bernoulli μεταξύ Β και Γ!



iii) Με βάση την παραπάνω σημείωση, σε όλη τη διάρκεια που το άκρο Β του σωλήνα βυθίζεται στο νερό, μπορούμε να πάρουμε Bernoulli από το Β στο Γ και να βρίσκουμε πάντα την ίδια ταχύτητα εκροής υ=4m/s!

Ας το ελέγξουμε βρίσκοντας την ταχύτητα εκροής σε μια τυχαία θέση όπου η επιφάνεια του νερού στο δοχείο απέχει κατά y από το κάτω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα. Έστω $υ_1$ η ταχύτητα στην επιφάνεια και $υ_2$ η ταχύτητα ροής στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το άκρο Β. Από την εξίσωση της συνέχειας παίρνουμε:

$$\upsilon_1 \cdot A = \upsilon_2 \cdot A \;\rightarrow\; \upsilon_1 = \upsilon_2$$

οπότε από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των δύο αυτών σημείων παίρνουμε:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 + \rho g y = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 \rightarrow$$

$$p_A = p_B - \rho g y$$

Βλέπουμε δηλαδή να ισχύει ξανά η εξίσωση (1) παρότι δεν έχουμε υγρό σε ισορροπία*!

Εφαρμόζουμε τώρα ξανά, κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΑΓ, την εξίσωση Bernouli, παίρνοντας

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 + \rho g \cdot (h + y) = p_Γ + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon^2 \overset{\upsilon_A=0}{\Longrightarrow} \rightarrow$$

$$p_{ατμ} - \rho g y + \rho g \cdot (h + y) = p_{ατμ} + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = 4m/s$$

iv) Έστω ότι θα απαιτηθεί χρονικό διάστημα Δt, ώστε η επιφάνεια (σημείο Α) να φτάσει στο κάτω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα (σημείο Β). Στο παραπάνω χρονικό διάστημα έχουμε σταθερή ταχύτητα εκροής, συνεπώς και **σταθερή παροχή**, ενώ χύνεται νερό συνολικού όγκου ΔV=A·h. Η παροχή αυτή γράφεται:

$$\frac{\Delta V}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{A}h}{\Delta \mathrm{t}} = A_1 \upsilon \rightarrow$$

$$\Delta \mathrm{t} = \frac{\mathrm{A}h}{A_1 \upsilon} = \frac{1 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 4} s = 1.000s$$

Σχόλια:

1) Μόλις ανοίξουμε την τάπα, εκρρέει νερό, άρα πρέεπι η επιφάνεια του νερού να κατέβει. Αλλά αυτό σημαίνει μείωση της πίεσης του εγκλωβισμένου αέρα, με αποτέλεσμα η ατμοσφαιρική πίεση (η πίεση στο σημείο Β) να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα $p_{αερ}+\rho g y$ και αέρας να μπαίνει στο νερό σχηματίζοντας φυσαλίδες που κινούνται προς την επιφάνεια.

2) Στο iii) ερώτημα, αποδείξαμε ότι $\upsilon_1=\upsilon_2$, πράγμα αναμενόμενο, αφού δεν έχουμε κάποια αλλαγή στη διατομή (εμβαδόν) του δοχείου. Ταυτόχρονα βέβαια δεχτήκαμε ότι οι ταχύτητες αυτές είναι **σχεδόν** μηδενικές, με την έννοια ότι είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα εκροής υ. Αυτές οι δύο συμβάσεις μας οδηγούν στο συμπέραμα ότι τελικά η κατάσταση στην περιοχή (από την επιφάνεια μέχρι το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Β) μοιάζει πολύ με ρευστό σε ισορροπία, οπότε έτσι ερμηνεύεται και η ισχύς τελικά τη σχέσης (1) που είχαμε για την ισορροπία του νερού.

3)

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης