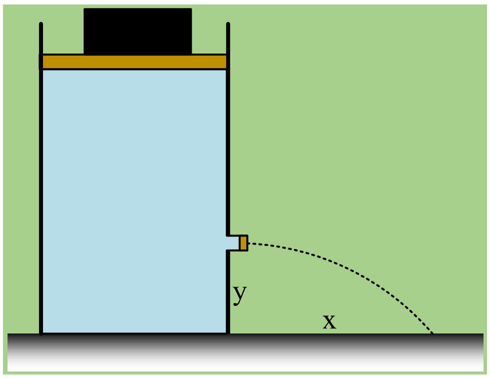
Το έμβολο, το κιβώτιο και η ροή.



Ένα κυλινδρικό δοχείο, εμβαδού βάσης $A=0{,}5m^2$, περιέχει νερό μέχρι ύψος $H=2{,}3m$ και κλείνετε στο πάνω μέρος με έμβολο βάρους $w_1=500N$. Σε ύψος $y=0{,}8m$ από τον πυθμένα υπάρχει ένας λεπτός σωλήνας διατομής $A_1=1cm^2$, ο οποίος κλείνεται με τάπα.

i) Να υπολογιστεί η δύναμη που το νερό ασκεί στην τάπα.

Τοποθετούμε πάνω στο έμβολο ένα κιβώτιο και αφαιρούμε την τάπα. Παρατηρούμε ότι η φλέβα νερού συναντά το οριζόντιο επίπεδο, πάνω στο οποίο στηρίζεται το δοχείο, σε οριζόντια απόσταση $x=2{,}4m$.

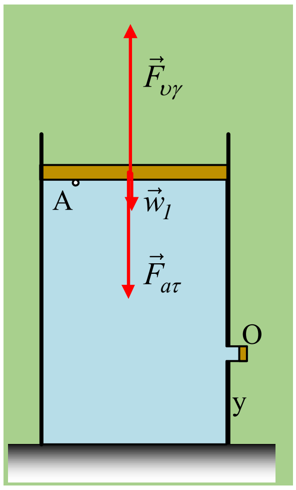
ii) Σε πόσο χρόνο μπορούμε να γεμίσουμε με νερό, ένα δοχείο με όγκο 3L;

iii) Να υπολογιστεί η δύναμη που το νερό ασκεί στο έμβολο, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη ροή.

iv) Να υπολογιστεί το βάρος w_2 του κιβωτίου.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}=10^5$ Pa, $g=10m/s^2$, ενώ το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο, όπου $F_{ατ}$ η δύναμη λόγω ατμοσφαιρικής πίεσης και $F_{υγ}$ η δύναμη που ασκεί το νερό στο έμβολο. Από την ισορροπία του εμβόλου παίρνουμε:

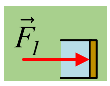
$$\Sigma \vec{F}=0 \rightarrow F_{υγ}=F_{ατ}+w \rightarrow \frac{F_{υγ}}{A}=\frac{F_{ατ}}{A}+\frac{w}{A} \rightarrow$$

$$p_A=p_{ατ}+\frac{w}{A}=10^5\,Pα+\frac{500}{0{,}5}\,Pα=101.000\,Pα$$

Όπου Α ένα σημείο του νερού σε επαφή με το έμβολο. Αλλά αν πάρουμε τώρα ένα σημείο Ο στην αριστερή πλευρά της τάπας, θα έχουμε για τις πιέσεις:

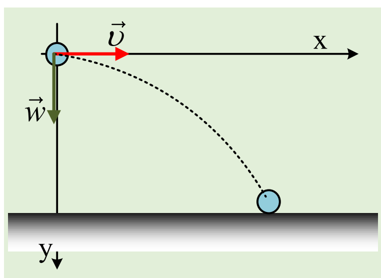
$$p_o-p_A=\rho gh \rightarrow p_o=p_A+\rho g(H-y) \rightarrow$$

$$p_o=101.000\,Pα+1.000\cdot 10\cdot(2{,}3-0{,}8)Pa=116.000\,Pa$$



Οπότε θεωρώντας πολύ μικρή την επιφάνεια της τάπας, με αποτέλεσμα σε όλα της τα σημεία να επικρατεί η ίδια πίεση με το Ο, θα έχουμε για την οριζόντια δύναμη F_1 (βλέπε σχήμα) που δέχεται από το νερό:

$$p_o=\frac{F_1}{A_1} \rightarrow F_1=p_1A_1=116.000\cdot 1\cdot 10^{-4}\,N=11{,}6\,N$$



ii) Μόλις ανοίξουμε την τάπα, σε ελάχιστο χρόνο θα αποκατασταθεί μια μόνιμη ροή, όπου το νερό θα εκρέει με οριζόντια ταχύτητα υ. Αλλά τότε αν εστιάσουμε σε μια μικρή μάζα Δm του νερού, αυτή θα εκτελέσει οριζόντια βολή για την οποία, με βάση την αρχή της επαλληλίας, θα έχουμε:

$$x = \upsilon \cdot t \quad \text{και} \quad y = ½\, g \cdot t^2$$

Με απαλοιφή του χρόνου παίρνουμε:

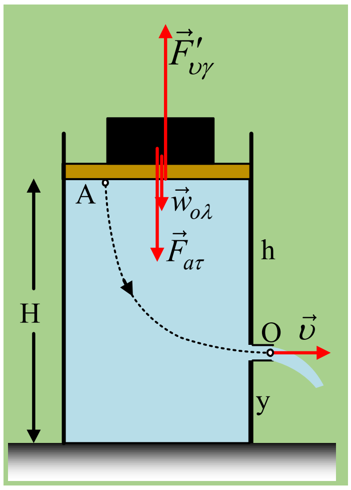
$$y = \frac{g}{2\upsilon^2}x^2 \rightarrow \upsilon = x\sqrt{\frac{g}{2y}} = 2{,}4\sqrt{\frac{10}{2\cdot 0{,}8}}m/s = 6m/s$$

Οπότε με την βοήθεια της παροχής βρίσκουμε, για το χρόνο που θα γεμίσουμε το δοχείο:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A_1\upsilon \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{A_1\upsilon} = \frac{3\cdot 10^{-3}m^3}{1\cdot 10^{-4}m^2\cdot 6m/s} = 5s$$

iii) Ας εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής, μεταξύ του σημείου Α, στην κάτω επιφάνεια του εμβόλου και του σημείου Ο, στην έξοδο εκροής του νερού με ταχύτητα υ:



$$p_A + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \ (1)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές της φλέβας στα Α και Ο παίρνουμε:

$$A\cdot\upsilon_A = A_1\upsilon \rightarrow \upsilon_A = \frac{A_1\upsilon}{A} = \frac{1cm^2}{10.000cm^2}\upsilon = 0{,}0001\upsilon$$

Πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε, μηδενική την ταχύτητα στο Α, οπότε λύνοντας την (1) ως προς p_A, παίρνουμε:

$$p_A = p_{\alpha\tau} - \rho g(H-y) + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \rightarrow$$

$$p_A = 10^5 Pa - 1.000\cdot 10\cdot(2{,}3-0{,}8)Pa + \frac{1}{2}1.000\cdot 6^2 Pa = 103.000Pa$$

Αλλά τότε το νερό ασκεί στο έμβολο κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω, μέτρου:

$$p_A = \frac{F'_{\upsilon\gamma}}{A} \rightarrow F'_{\upsilon\gamma} = p_A A = 103.000\cdot 0{,}5N = 51.500N$$

iv) Ερχόμαστε ξανά στην ισορροπία του εμβόλου και συζητάμε την ισορροπία του «σώματος» έμβολο και κιβώτιο, το οποίο δέχεται τις δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow F'_{\upsilon\gamma} = F_{\alpha\tau} + w_{o\lambda} \rightarrow \frac{F'_{\upsilon\gamma}}{A} = \frac{F_{\alpha\tau}}{A} + \frac{w_{o\lambda}}{A} \rightarrow p_A = p_{\alpha\tau} + \frac{w_{o\lambda}}{A} \rightarrow$$

$$w_{o\lambda} = (p_A - p_{\alpha\tau})A = (103.000 - 100.000)0{,}5N = 1.500N$$

Όμως:

$$w_{ολ}=w_1+w_2 \rightarrow w_2=w_{ολ}-w_1=1.500N-500N=1.000N$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης