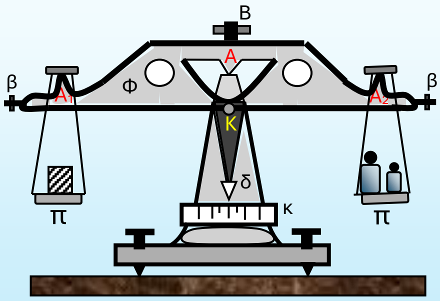
Ζυγός με φάλαγγα και πλάστιγγες.



Φ: φάλαγγα
π,π: πλάστιγγες
δ: δείκτης
κ: κλίμακα
β,β,Β : κινητά βάρη για την μετάθεση του Κ
A_1,Α,A_2 : ακμές παράλληλες στο ίδιο επίπεδο **Κ:** κέντρο βάρους φάλαγγας

*Σχηματική παράσταση ζυγού (αντιγραφή) από το πανεπιστημιακό σύγγραμμα του καθηγητή μου ,**Καίσαρα Αλεξόπουλου.***

Λειτουργία του ζυγού (*με βάση το σύγγραμμα Καίσαρα Αλεξόπουλου*)

Στη φάλαγγα ζυγού που βρίσκεται σε ισορροπία ασκούνται:

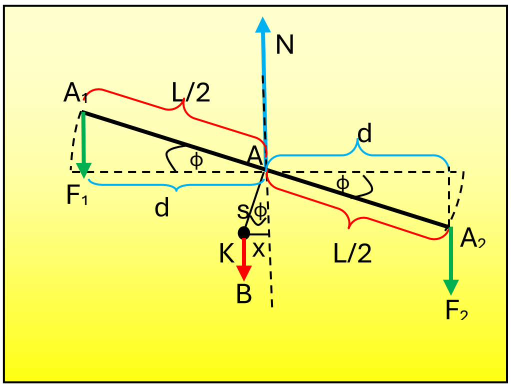
- οι δυνάμεις που οφείλονται στα βάρη των όμοιων πλαστίγγων W για κάθε μια και των σωμάτων και σταθμών που βρίσκονται σ'αυτές και δρουν στα A_1 και A_2
- η δύναμη του βάρους Β της φάλαγγας, την οποία θεωρούμε ότι δρα στο κέντρο βάρους Κ
- η δύναμη Ν από το κεντρικό στήριγμα στην ακμή Α

Υποθέστε ότι βάζετε ένα σώμα βάρους W_1 στην αριστερή πλάστιγγα και σταθμά βάρους W_2 στη δεξιά και ότι η φάλαγγα ισορροπεί σε κλίση τέτοια ώστε η ευθεία που διέρχεται από την κεντρική ακμή Α και το Κ σχηματίζει με την κατακόρυφο που περνά από την ακμή Α γωνία φ.

1)**Να υπολογίσετε την γωνία φ σε σχέση με τις δυνάμεις W_1, W_2, Β, της απόστασης L μεταξύ των ακμών A_1 ,A_2 και της απόστασης S=(ΑΚ)**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σχηματική παράσταση του ζυγού απλοποιημένη στη θέση ισορροπίας, που περιγράφεται παραπάνω.



Οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα :

$F_1=W+W_1$

$F_2=W+W_2$

Από την ισορροπία της φάλαγγας:

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow$$

$$-F_1 \cdot d - B \cdot x + F_2 \cdot d = 0 \Rightarrow$$

$$-(W+W_1)d - B \cdot x + (W+W_2)d = 0 \Rightarrow$$

$$-W_1 d - B \cdot x + W_2 d = 0 \Rightarrow$$

$$-W_1\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - B\cdot S\eta\mu\varphi + W_2\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow -W_1\frac{L}{2} - B\cdot S\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} + W_2\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$-W_1\frac{L}{2} - B\cdot S\varepsilon\varphi\varphi + W_2\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow B\cdot S\varepsilon\varphi\varphi = \left(W_2 - W_1\right)\frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{W_2 - W_1}{2B}\frac{L}{S} \quad \text{(I)}$$

Παρατηρούμε ότι, όταν το βάρος του σώματος και των σταθμών δεν είναι ίσα ο ζυγός ισορροπεί με το δείκτη δ να μην είναι στη θέση του μηδενός και γενικά η ισορροπία καθορίζεται από τη σχέση (Ι)

Αν $W_1 = W_2$ από την (Ι) προκύπτει : εφφ=0 δηλαδή φ=0 και ο δείκτης θα είναι στο 0

Ευαισθησία (ε) ζυγού

Ονομάζουμε ευαισθησία (ε) ζυγού το πηλίκον $\varepsilon = \dfrac{\varphi}{W_2 - W_1}$

Ερώτηση: Από τι νομίζετε ότι εξαρτάται η ευαισθησία του ζυγού;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από τη σχέση (Ι) για μικρή γωνία φ (δεχόμαστε ότι εφφ=φ) προκύπτει:

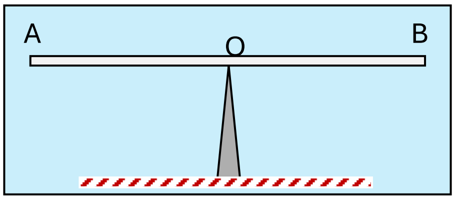
$$\varphi = \frac{W_2 - W_1}{2B}\frac{L}{S} \Rightarrow \frac{\varphi}{W_2 - W} = \frac{L}{2S} \Rightarrow \varepsilon = \frac{L}{2BS}$$

Άρα η ευαισθησία εξαρτάται από το μήκος του μοχλοβραχίονα L/2 (ανάλογος αυτού), από το βάρος της φάλαγγας (αντιστρόφως ανάλογος) και από την απόσταση S του κέντρου βάρους και της κεντρικής ακμής Α (αντιστρόφως ανάλογος)

Παρατηρούμε ότι η ευαισθησία δεν εξαρτάται από τη φόρτιση των πλαστίγγων.

ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρείστε την απλή εκδοχή ενός ζυγού που αποτελείται όπως βλέπεται στο διπλανό σχήμα από μια λεπτή ομογενή ράβδο ΑΒ μήκους L και βάρους w_ρ (επονομαζόμενη φάλαγγα) η οποία στηρίζεται στο μέσον της Ο στην ακμή πρίσματος γύρω από την οποία μπορεί ελεύθερα να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Στα άκρα της φάλαγγας η γενικά σε δύο σημεία Γ και Δ εκατέρωθεν του σημείου στήριξης μπορούμε να αναρτήσουμε κατάλληλα δύο σώματα ψάχνοντας την ισορροπία της φάλαγγας σε οριζόντια θέση και τη σχέση των βαρών των σωμάτων η τη σχέση των μοχλοβραχιόνων ΟΓ και ΟΔ.



1) Κατ'αρχάς κρεμάμε στα άκρα της φάλαγγας Α και Β μέσω αμελητέου βάρους νημάτων δύο σώματα βαρών $w_{\sigma,1}$,$w_{\sigma,2}$ και παρατηρούμε ότι η φάλαγγα ισορροπεί ακίνητη, αφήνοντας την ελεύθερη στην οριζόντια θέση.
α) να βρείτε τη σχέση των βαρών των δύο σωμάτων
β) αν αποκλίνουμε τη φάλαγγα από την οριζόντια θέση (χωρίς να χαλάσει το σημείο στήριξης) και την αφήσουμε ελεύθερη θα μείνει ακίνητη η θα περιστραφεί;

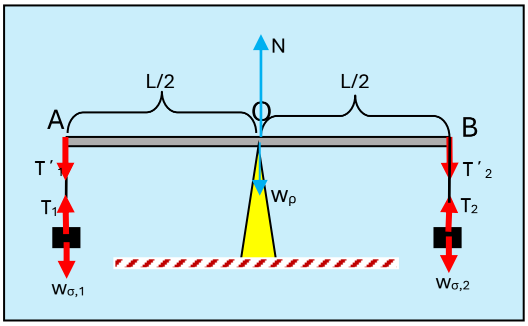
2) Διαθέτουμε δύο σώματα με βάρη $w_1=5w_{\sigma,1}/6$ και $w_2=11w_{\sigma,2}/12$
α) ποιος ο λόγος των αποστάσεων από το μέσον Ο της φάλαγγας που πρέπει να αναρτήσουμε τα σώματα ώστε η φάλαγγα να ισορροπεί ακίνητη αφήνοντάς την ελεύθερη σε οριζόντια θέση, όντας αναρτημένη στο μέσον της Ο, ας πούμε.
β) αν τα παραπάνω σώματα αναρτηθούν στα άκρα της φάλαγγας σε ποια απόσταση (χ) από το μέσον της Ο πρέπει να στηριχθεί στην ακμή του πρίσματος η φάλαγγα , ώστε να ισορροπεί ακίνητη αφήνοντάς την ελεύθερη στην οριζόντια θέση.
γ) να διερευνήσετε την σχέση που βρήκατε στο παραπάνω ερώτημα 2β) για την εύρεση της απόστασης χ αν θεωρήσουμε το βάρος της φάλαγγας αμελητέο και να συγκρίνετε το λόγο L_1/L_2 με την τιμή που βρήκατε στο 2α).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) α)

Αφού σχεδιάσαμε το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο και επειδή αυτή είναι σε ισορροπία πρέπει:

$$\Sigma\tau_O = 0 \Rightarrow T_1' \cdot \frac{L}{2} = T_2' \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow T_1' = T_2' \quad (1)$$



Οι ροπές των Ν και W_ρ ως προς το Ο είναι μηδενικές αφού διέρχονται από το Ο.

Αλλά έχουμε και την ισορροπία των σωμάτων λόγω της οποίας έχουμε:

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow T_1 = W_{\sigma,1} \xrightarrow{T_1=T_1'} T_1' = W_{\sigma,1} \text{ και ομοίως για το άλλο σώμα}$$

$$\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow T_2 = W_{\sigma,2} \xrightarrow{T_2=T_2'} T_2' = W_{\sigma,2}$$

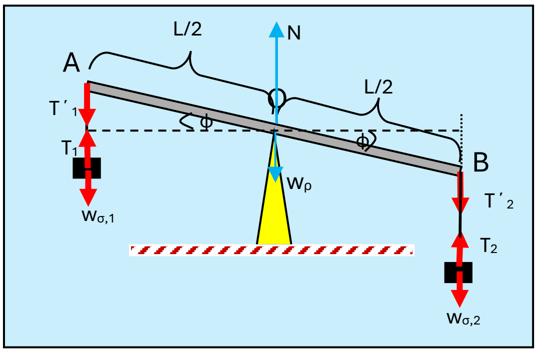
$$\text{Άρα από την } (1) \Rightarrow \boxed{W_{\sigma,1} = W_{\sigma,2} = W}$$

β) Στη νέα θέση απόκλισης κατά γωνία φ και με την προφανή μη αλλαγή στη σχέση των τάσεων των νημάτων (1) θα έχουμε :

$$\Sigma\tau_O = T_1' \cdot \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - T_2' \cdot \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$$

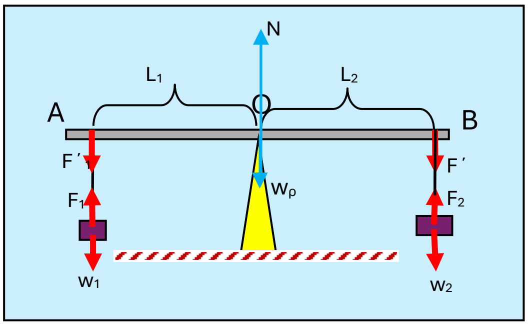
$$\xrightarrow{(1)} \Sigma\tau_O = 0$$

άρα αποκλείεται περιστροφή της φάλαγγας AB.



2) α)

$$\Sigma\tau_O = 0 \Rightarrow F_1' \cdot L_1 = F_2' \cdot L_2 \ (2)$$



Αλλά έχουμε και την ισορροπία των σωμάτων λόγω της οποίας έχουμε :

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = W_1 \xrightarrow{F_1 = F_1'} F_1' = W_1$$

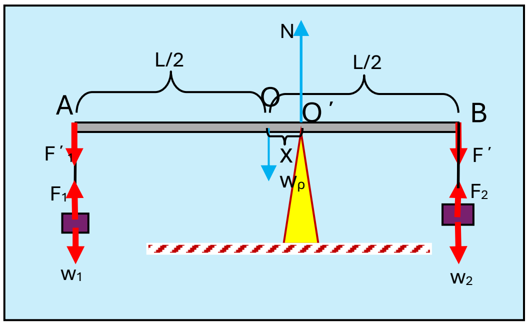
και ομοίως για το άλλο σώμα

$$\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = W_2 \xrightarrow{F_2 = F_2'} F_2' = W_2$$

$$\text{Από την } (2): F_1' \cdot L_1 = F_2' \cdot L_2 \Rightarrow W_1 \cdot L_1 = W_2 \cdot L_2 \Rightarrow \frac{5}{6}W_{\sigma,1}L_1 = \frac{11}{12}W_{\sigma,2}L_2 \xrightarrow{W_{\sigma,1}=W_{\sigma,2}}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}} \Rightarrow \boxed{\frac{L_1}{L_2} = \frac{11}{10}} \ (3)$$

β) Έστω ότι μετατοπίζουμε το σημείο στήριξης Ο στη θέση Ο΄ κατά x δεξιότερα μια και W2>W1 (μικραίνουμε το μοχλοβραχίονα προς το μέρος του μεγαλύτερου βάρους).



$$\Sigma\tau_{O'}=0\Rightarrow F_1'\cdot\left(\frac{L}{2}+x\right)+W_\rho\cdot x=F_2'\left(\frac{L}{2}-x\right)\xrightarrow{F_1'=W_1\ \kappa\alpha\iota\ F_2'=W_2}$$

$$W_1\frac{L}{2}+W_1\cdot x+W_\rho\cdot x=W_2\frac{L}{2}-W_2\cdot x\Rightarrow x=\frac{\left(W_2-W_1\right)\frac{L}{2}}{\left(W_1+W_\rho+W_2\right)\cdot}\xrightarrow{W_1=\frac{5}{6}W\ \&\ W_2=\frac{11}{12}W}$$

$$\boxed{x=\frac{\frac{1}{24}WL}{\frac{21}{12}W+W_\rho}}\ (4)$$

γ) $A\pi\acute{o}\ \tau\eta\nu\ (4)\ \gamma\iota\alpha W_\rho=0\Rightarrow x=\dfrac{\frac{1}{24}L}{\frac{21}{12}}\Rightarrow x=\dfrac{1}{42}L$

$T\acute{o}\tau\varepsilon$: $L_1=\dfrac{L}{2}+x=\dfrac{L}{2}+\dfrac{L}{42}=\dfrac{22}{42}L=\dfrac{11}{21}L\ \kappa\alpha\iota\ L_2=\dfrac{L}{2}-x=\dfrac{L}{2}-\dfrac{L}{42}=\dfrac{20}{42}L=\dfrac{10}{21}L$

Έτσι : $\dfrac{L_1}{L_2}=\dfrac{\frac{11}{21}L}{\frac{10}{21}L}\Rightarrow\dfrac{L_1}{L_2}=\dfrac{11}{10}$ αποτέλεσμα που ταυτίζεται με το 2α) καθώς έπρεπε.

Παντελεήμων Παπαδάκης
05/02/2018