

Ο Starship της SpaceX είναι δύο σταδίων. Το πρώτο στάδιο είναι ο πύραυλος super Heavy με 33 κινητήρες Raptor οι οποίοι καίνε καύσιμο με ρυθμό $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 800 \text{ kg/s}$ και εκτοξεύουν καυσαέρια με ταχύτητα $u_{e1} = 3200 \text{ m/s}$. Ο Super Heavy έχει καθαρή μάζα $M_1 = 200 \text{ tn}$ και φέρει καύσιμα(υγρό μεθάνιο με οξειδωτικό υγρό οξυγόνο) μάζας $M_{K1} = 3400 \text{ tn}$.

Το δεύτερο στάδιο είναι ο πύραυλος – διαστημόπλοιο Starship με 6 κινητήρες Raptor στους οποίους όμως η ταχύτητα εξόδου καυσαερίων είναι $u_{e2} = 3700 \text{ m/s}$ επειδή λειτουργούν στο κενό και τα καυσαέρια δεν συμπιέζονται από την ατμόσφαιρα. Το Starship έχει καθαρή μάζα $M_2 = 120 \text{ tn}$ και μπορεί να φέρει καύσιμα έως $M_{K2} = 1200 \text{ tn}$.

Ο super Heavy ελευθερώνει τον Starship στα 70 km περίπου και στη συνέχεια ο Starship τίθεται σε κυκλική τροχιά parking σε ύψος $h = 200 \text{ km}$ από την επιφάνεια της γης.

Κάποια στιγμή ο Starship ενεργοποιεί τους κινητήρες του κατά τρόπο ώστε να μπει στο περίγειο μιας ελλειπτικής τροχιάς Hohmann με απόγειο το σημείο L_1 του συστήματος γης – σελήνης.

Δίνονται: Ακτίνα γης $R_g = 6400 \text{ km}$, $\mu = GM_g = 4 \times 10^{14} \text{ Nm}^2/\text{kg}$ και ότι η σελήνη κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 384.000 \text{ km}$ το δε σημείο L_1 απέχει $x = 326740 \text{ km}$ από το κέντρο της γης. Η συνολική μάζα πυραύλου M_i η τελική M_f και η ΔV συνδέονται με την εξίσωση Tsiolkovsky $\Delta V = u_e \ln \frac{M_i}{M_f}$

$$\text{ή } \frac{M_i}{M_f} = e^{\Delta V/u_e}$$

A) Να βρεθούν οι ταχύτητες της κυκλικής τροχιάς parking και της σελήνης στην τροχιά της.

B) Να βρεθούν οι ταχύτητες στο περίγειο και στο απόγειο της τροχιάς Hohmann. Δίνεται ότι η μηχανική ενέργεια διατηρείται κατά μήκος της τροχιάς Hohmann και ανά μονάδα μάζας είναι ίση με $E = -\frac{\mu}{2a}$ όπου a ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς Hohmann.

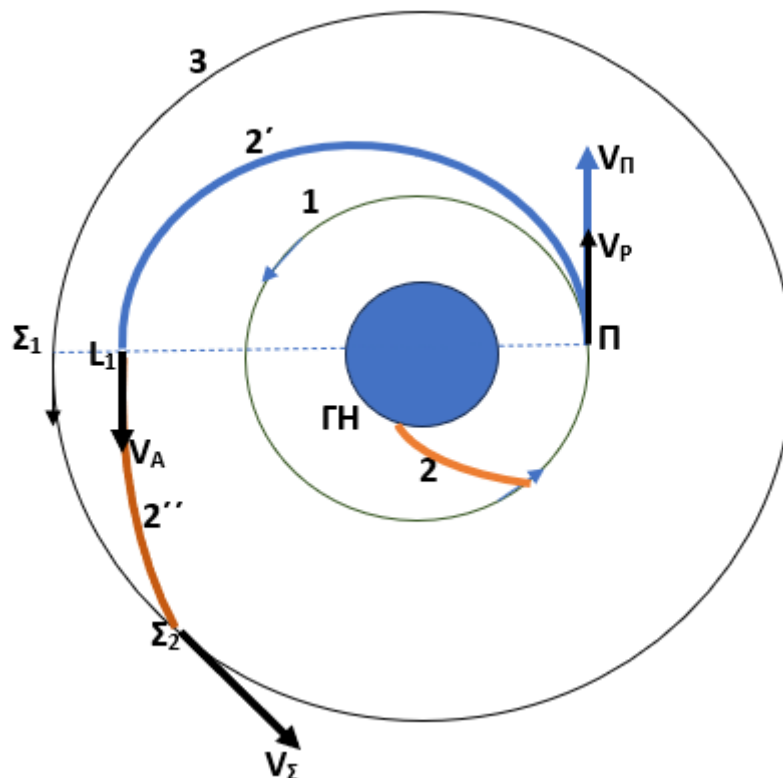
Γ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί κάθε κινητήρας στον πύραυλο και στα δύο στάδια. Η ταχύτητα εξόδου καυσαερίων είναι σταθερή.

Δ) Ο πύραυλος ξεκινά με τις δεξαμενές γεμάτες καύσιμα. Ποια η ταχύτητα V του πυραύλου τη στιγμή που ο super heavy εξαντλεί τα καύσιμά του και αποχωρίζεται από τον starship; Πόσος χρόνος χρειάστηκε για να αδειάσουν οι δεξαμενές του super heavy;

Ε) Πόσα καύσιμα καταναλώνει ο starship μέχρι την τροχιά parking

ΣΤ) Ο starship ανεφοδιάζεται με καύσιμα σε τροχιά και κάποια στιγμή πυροδοτεί τους κινητήρες του μπαίνοντας στο περίγειο της τροχιάς Hohmann. Με πόσα καύσιμα θα φτάσει στο L_1 ;

Λύση



1 τροχιά parking, **3** τροχιά σελήνης, **2'** τροχιά Hohmann, **3** τροχιά σελήνης, V_P ταχύτητα του Starship στην τροχιά parking, $V_Π$ ταχύτητα του starship στο περίγειο της τροχιάς Hohmann, V_A ταχύτητα του starship στο απόγειο της τροχιάς Hohmann, $V_Σ$ η ταχύτητα της σελήνης.

$$\mathbf{A)} \alpha_c = \alpha_g \Rightarrow \frac{\mu}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

$$\text{Τροχιά parking } V_P = \sqrt{\frac{\mu}{R_T + h}} \Rightarrow V_P = 7785 \text{ m/s}$$

$$\text{Ταχύτητα σελήνης: } V_Σ = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \Rightarrow V_Σ = 1022 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{B)} \quad E = \frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad \text{όπου } a = \frac{x + (R_T + h)}{2} =$$

$$\frac{326740 + 6600}{2} = 166670 \text{ km}$$

$$\text{Στο περίγειο: } V_{\Pi} = \sqrt{4 \times 10^{14} \left(\frac{2}{6600000} - \frac{1}{166670000} \right)} \Rightarrow V_{\Pi} = 10.900 \text{ m/s.}$$

$$\text{Στο απόγειο: } V_A = \sqrt{4 \times 10^{14} \left(\frac{2}{326740000} - \frac{1}{166670000} \right)} \Rightarrow V_A = 220 \text{ m/s}$$

Γ) 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα στη γενική του μορφή για τα καυσάερια:

$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta(mu_{\varepsilon})}{\Delta t}$ και επειδή η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται $F = u_{\varepsilon} \frac{\Delta m}{\Delta t}$ (1) ίσου μέτρου δύναμη και αντίθετης φοράς δέχεται ο πύραυλος (3ος νόμος του Νεύτωνα)

Για τον super heavy: (1) $\Rightarrow F = 3200 \times 800 = 2.560.000 \text{ N}$ $F_{ολ} = 33F = 84.480.000 \text{ N}$

Για τον starship: $F = 3700 \times 800 = 2.960.000 \text{ N}$ $F_{ολ} = 6F = 17.760.000 \text{ N}$

Δ) Για τον super heavy μέχρι να εξαντληθούν τα καύσιμά του:

$$M_i = 200 + 3400 + 120 + 1200 = 4920 \text{ tn}, M_f = 200 + 120 + 1200 = 1520 \text{ tn}$$

$$\Delta V = V - 0 = u_{\varepsilon(1)} \ln \frac{M_i}{M_f} = 3200 \ln \frac{4920}{1520} \Rightarrow V = 3759 \text{ m/s}$$

$$\frac{\Delta m_{ολ}}{\Delta t} = 33 \times 800 \Rightarrow 3400000 = 26400 \Delta t \Rightarrow \Delta t = 129 \text{ s} = \text{περίπου } 2 \text{ min}$$

Ε) Για τον starship μέχρι την τροχιά parking:

$$\Delta V = 7785 - 3759 = 4026 \text{ m/s}, M_i = 120 + 1200 = 1320 \text{ tn}$$

$$\frac{M_i}{M_f} = e^{\Delta V / u_{\varepsilon 2}} = e^{4026 / 3700} = 2,97 \Rightarrow M_f = 444 \text{ tn του περισσεύουν } 444 - 120 =$$

324 tn καύσιμα που δεν φτάνουν για τη σελήνη οπότε ανεφοδιάζεται σε τροχιά γεμίζοντας τις δεξαμενές.

$$\text{ΣΤ) } \Delta V = 10900 - 7785 = 3115 \text{ m/s}, M_i = 120 + 1200 = 1320 \text{ tn}$$

$$\frac{M_i}{M_f} = e^{3115 / 3700} = 2,32 \Rightarrow M_f = 1320 / 2,32 = 570 \text{ tn}$$

Άρα περίσσεψαν $570 - 120 = 450 \text{ tn}$ καύσιμα για τη μανούβρα προσσελήνωσης και την επιστροφή.